

Andrzej Antoni Czajkowski, Krzysztof Wiercholski
Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego,
Katedra Techniki Ciepłej Politechniki Szczecińskiej

ANALIZA NUMERYCZNA WARTOŚCI NAPRĘŻEŃ ŚCINAJĄCYCH WYSTĘPUJĄCYCH
W PRZEPLYWIE CIECZY NEWTONOWSKIEJ O NIEMONOTONICZNIE ZMIENNEJ
LEPKOŚCI DYNAMICZNEJ W MIESZALNIKACH WALCOWYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono analizę numeryczną wartości naprężeń ścinających występujących w cieczy newtonowskiej podczas jej mieszania w mieszalniku walcowym dla obranych różnych modeli niemonotonicznie zmiennej lepkości dynamicznej cieczy w obszarze mieszania. Rozkład wartości naprężeń ścinających ma istotne znaczenie w procesie mieszania cieczy.

Резюме. В работе представлен численный анализ значений касательных напряжений выступающих в ньютоновской жидкости в цилиндрическом смесителе для различных моделей немонотонных функций динамической вязкости в пространстве смешения. Распределение значений касательных напряжений имеет важное влияние на процесс смешения жидкости.

Summary. In the paper the numerical analysis of values of the shear stresses occurring in the Newtonian fluid in the cylindrical mixer for the different models of the non-monotone dynamic viscosity distribution is presented. The distribution of the values of the shear stresses in the mixing space is very important in the process of the fluid mixing.

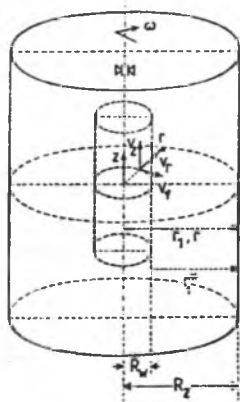
1. WSTĘP

Tematyka pracy dotyczy stacjonarnego przepływu newtonowskiej izotermicznej cieczy wywołanego ruchem obrotowym cylindrycznego mieszadła w mieszalniku walcowym (rys. 1.). Przyjmuje się laminarny przepływ cieczy nieściśliwej o stałej gęstości ρ z pominięciem sił masowych o niemonotonicznie zmiennej lepkości dynamicznej wywołanej zmianami składu chemicznego mieszanej cieczy. W niniejszej pracy nie uwzględniono wpływu temperatury na zmianę lepkości cieczy.

Rozkład wartości prędkości cieczy mieszanej ma zasadniczy wpływ na para-

metry procesu mieszania. Są to między innymi naprężenia ścinające oraz sprawność mieszalnika. Rozkład wartości naprężeń ścinających występujących w przepływie cieczy stanowi szczegółowy temat tej pracy.

Ciecze w trakcie mieszania charakteryzują się występowaniem zmiennych ekstremalnych wartości ich lepkości w obszarze cieczy. Dlatego też celem pracy jest zbadanie wpływu różnych konfiguracji wartości niemonotonicznie zmiennej lepkości dynamicznej cieczy newtonowskiej na zmiany wartości naprężeń ścinających powstałych w trakcie przepływu cieczy w przestrzeni mieszania.



Rys. 1. Mieszalnik walcowy z cylindrycznym wałkiem mieszającym

Fig. 1. The cylindrical mixer with the cylindrical shaft

2. RÓWNANIA RUCHU

Przepływ w mieszalniku walcowym opisany jest równaniem pędu, do którego podstawiono związki konstytutywne (fizyczne). Równania te w zestawieniu z równaniem ciągłości przy uwzględnieniu lepkości zmieniającej się w kierunku promienia mieszadła walcowego oraz dla składowych wektora prędkości cieczy:

$$v_\psi = v_\psi(r), \quad v_r(r) = 0, \quad v_z(r) = 0, \quad (1)$$

i dla ciśnienia $p = \text{const.}$, dają następujące równanie różniczkowe zwyczajne opisujące prędkość obwodową $v_\psi(r)$ cieczy [1]:

$$\frac{d}{dr} \left(\mu \frac{dv_\psi}{dr} \right) + \frac{1}{r} \mu \frac{dv_\psi}{dr} - \frac{1}{r^2} \mu v_\psi - \frac{1}{r} \frac{d\mu}{dr} v_\psi = 0, \quad (2)$$

gdzie r oznacza współrzędną promieniową $R_w \leq r \leq R_z$, μ - zmienny współczynnik lepkości dynamicznej cieczy mieszanej, przy czym R_z - oznacza promień zewnętrzny mieszalnika, a R_w - promień wałka mieszającego.

Ciecz przylegająca do wałka ma prędkość jego powierzchni równą ωR_w , gdzie symbol ω oznacza prędkość kątową wałka mieszającego. Natomiast na ściankach naczynia prędkość cieczy zanika. Stąd warunki brzegowe dla równania (2) są następujące:

$$v_{\varphi}(r=R_w) = \omega R_w, \quad v_{\varphi}(r=R_z) = 0. \quad (3)$$

Rozwiązanie szczególne równania (2) przy warunkach brzegowych (3) ma następującą postać [2]:

$$v_{\varphi_1}(r_1) = r_1 G_{r_1} \left[G_1 \right]^{-1}, \quad G_{r_1} = \int_{r_1}^D \left[\mu_1(r_2) \right]^{-1} r_2^{-3} dr_2, \quad (4)$$

gdzie $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq D$, $1 < D < +\infty$, natomiast bezwymiarowe wartości v_{φ_1} , μ_1 , r_1 , D określa się następującymi wzorami:

$$v_{\varphi_1} = v_{\varphi} / \omega R_w, \quad \mu_1 = \mu / \mu_0, \quad r_1 = r / R_w, \quad D = R_z / R_w. \quad (5)$$

3. NAPRĘŻENIA ŚCINAJĄCE

Wartości naprężeń ścinających τ dla stałej temperatury oraz zmiennej lepkości dynamicznej cieczy $\mu = \mu(r)$ określa się następującym wzorem [1]:

$$\tau = -r \mu(r) \frac{d}{dr} \left(\frac{v_{\varphi}}{r} \right). \quad (6)$$

Wielkości bezwymiarowe określone wzorami (5) wprowadzone do wzoru (6) dają wartości naprężeń ścinających w następującej postaci:

$$\tau = -\mu_0 \omega r_1 \mu_1(r_1) \frac{d}{dr_1} \left(\frac{v_{\varphi_1}}{r_1} \right). \quad (7)$$

Wykorzystując wzór (4) we wzorze (7) otrzymuje się następujące wyrażenie określające wartości naprężeń ścinających na głębokości przestrzeni mieszania:

$$\tau = \mu_0 \omega r_1^{-2} G_1^{-1}. \quad (8)$$

Kładąc $r_1=1$ we wzorze (8) otrzymuje się następującą postać wartości naprężeń ścinających na powierzchni wałka mieszającego:

$$\tau_p = \tau(r_1=1) = \mu_0 \omega G_1^{-1}. \quad (9)$$

Dla stałej lepkości cieczy $\mu_1=1$ wzory (8) i (9) przyjmują znaną z literatury postać ([3], s. 890):

$$\tau = 2 \mu_0 \omega \frac{D^2}{D^2 - 1} \frac{1}{r_1^2}, \quad (10)$$

oraz

$$\tau_p = \tau(r_1=1) = 2 \mu_0 \omega \frac{D^2}{D^2 - 1}. \quad (11)$$

W dalszej analizie wyznacza się stosunek wartości naprężeń ścinających τ na głębokości przestrzeni mieszania (przy zmiennej lepkości dynamicznej cieczy) do wartości naprężeń ścinających τ_p na powierzchni wałka mieszającego (przy stałej lepkości dynamicznej cieczy). Stosunek ten ma postać:

$$\tau/\tau_p = \frac{1}{2} \frac{D^2 - 1}{D^2} r_1^{-2} G_1^{-1}. \quad (12)$$

Dla stałej lepkości $\mu_1=1$ wzór (12) przyjmuje znaną z literatury następującą postać ([3], s. 890):

$$\tau/\tau_p = r_1^{-2}. \quad (13)$$

4. ANALIZA NUMERYCZNA

W trakcie mieszania cieczy w mieszalniku walcowym o niemonotonicznie zmiennej lepkości można wyróżnić dwa przypadki zmian ekstremalnych wartości lepkości cieczy. Pierwszy przedstawia dyslokację ekstremalnej wartości cieczy mieszanej, jaka występuje od powierzchni wałka mieszającego w głąb cieczy, natomiast drugi dotyczy zmian (wzrostu lub spadku) ekstremalnej wartości cieczy mieszanej w ustalonej odległości od wałka mieszającego.

Zmiany te opisuje przyjęta następująca klasa funkcji lepkości dynamicznej cieczy:

$$\mu_1(r_1^*) = \frac{a r_1^*}{(r_1^*)^2 + b} + 1, \quad r_1^* = \frac{r_1 - D}{D - 1}, \quad (14)$$

gdzie $0 \leq r_1^* \leq 1$, współczynniki rzeczywiste a, b oraz s spełniają związki:

$-2\sqrt{b} < a < +\infty$, $0 < b < +\infty$ oraz $a = \pm\sqrt{b}$. Symbol r_1 określa nową bezwymiarową zmienną. Funkcje klasy (14) przyjmują przesuwające się jak też i wzrastające (malejące) ekstrema lokalne jak pokazano na rys.2.

Po uwzględnieniu klasy funkcji lepkości (14) we wzorze (12) bezwymiarowy stosunek naprężeń ścinających uzyska dogodną do analizy numerycznej postać:

$$\tau/\tau_p = \frac{1}{2} \frac{D+1}{D^2} \left[(D-1)r_1^* + 1 \right]^{-2} \left[\int_0^1 W(r_1^*) dr_1^* \right]^{-1} \quad (15)$$

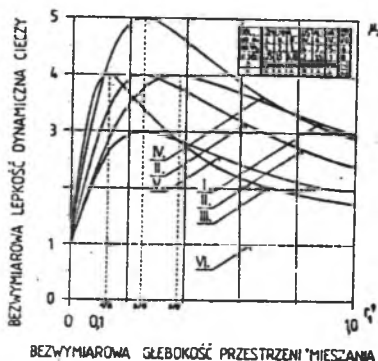
gdzie

$$W(r_1^*) = \left[(r_1^*)^2 + b \right] \left[(r_1^*)^2 + ar_1^* + b \right]^{-1} \left[(D-1)r_1^* + 1 \right]^{-3} \quad (15a)$$

Dla stałej lepkości $\mu = 1$ wzór (15) przybiera następującą postać:

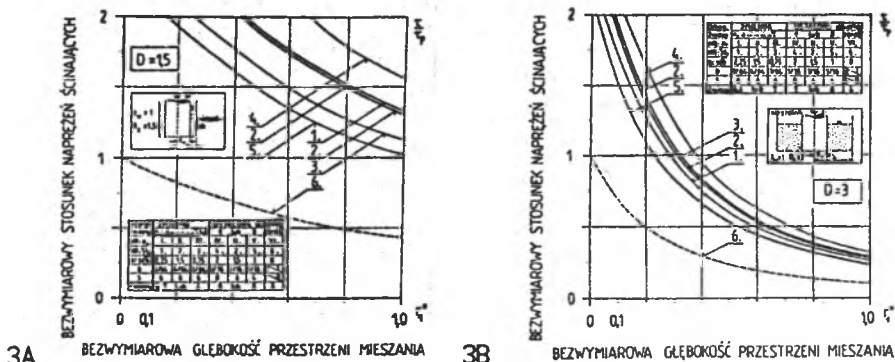
$$\tau/\tau_p = \left[(D-1)r_1^* + 1 \right]^{-2} \quad (16)$$

Korzystając ze wzoru (14) przeprowadzono analizę numeryczną wartości funkcji lepkości dynamicznej cieczy przy zmiennej odległości ekstremum wartości lepkości od wałka dla $a = 3/4; 6/4; 9/4$ przy $b = 1/64; 4/64; 9/64$ oraz przy ustalonej odległości ekstremum wartości lepkości od wałka dla $a = 1; 3/2; 2$ przy $b = 1/16$. Dla stałej lepkości przyjęto $a = 0$. Wyniki pokazano na rys.2. Na podstawie wzorów (15) i (16) przeprowadzono analizę numeryczną wartości naprężeń ścinających dla wymienionych zakresów współczynników a oraz b . Uzyskane wyniki pokazano na rys.3A,B. Obliczenia przeprowadzono na komputerze IBM PC/AT 20+ w języku Turbo Pascal v.3.01.



Rys.2. Niemonotoniczne zmiany wartości lepkości dynamicznej cieczy newtonowskiej

Fig.2. The non-monotone variables of a dynamic viscosity for the newtonian fluid



Rys. 3. Rozkłady wartości naprężeń ścinających w cieczy newtonowskiej przy zmiennej (krzywe 1,2,3 na rys 3A,B) lub przy ustalonej (krzywe 4,2,5 na rys 3A,B) odległości ekstremum wartości lepkości od wałka mieszającego dla stosunku długości promienia mieszalnika do długości promienia wałka mieszającego $D=1.5$ (rys.3A) oraz $D=3$ (rys.3B).

Fig. 3. The distributions of the values of the shear stresses in the Newtonian fluid for the variable (the curves 1,2,3 on the Fig.3A,B) or the constant (the curves 4,2,5 on the Fig.3A,B) distance of extreme of the viscosity function from the mixer shaft, for the quotient of the length of the mixer radius and of the length of the shaft radius, $D=1.5$ (Fig.3A) and $D=3$ (Fig.3B).

5. WNIOSKI

Wniosek 1. Niemonotoniczne zmiany wartości lepkości dynamicznej cieczy mieszanej powodują wzrost wartości naprężeń ścinających w obszarze cieczy w trakcie przepływu w porównaniu z wartościami naprężeń ścinających występujących w cieczy o stałej lepkości.

Wniosek 2. Przybliżanie się ekstremalnych wartości lepkości dynamicznej cieczy newtonowskiej do wałka mieszającego (krzywe I, II, III na rys.2. w zakresie do około połowy odległości pomiędzy powierzchnią wałka a powierzchnią naczynia) powoduje spadek wartości naprężeń ścinających dla mieszalników o małych promieniach lub wzrost wartości naprężeń ścinających dla mieszalników o dużych promieniach (krzywe 1,2,3 na rys.3A,B).

Wniosek 3. Wzrastanie ekstremalnej wartości lepkości dynamicznej cieczy newtonowskiej w ustalonej odległości od wałka mieszającego powoduje wzrost wartości naprężeń ścinających w cieczy podczas mieszania (krzywe 5,2,4 na rys.3A,B) w porównaniu z wartościami naprężeń ścinających dla cieczy newtonowskiej o stałej lepkości.

LITERATURA

- [1] Gryboś R.: Podstawy mechaniki płynów. PWN, Warszawa 1989.
- [2] Kaćki E.: Równania różniczkowe cząstkowe w zagadnieniach fizyki i techniki. WNT, Warszawa 1989.
- [3] Brauer H.: Grundlagen der Einphasen und Mehrphasenströmungen. Verlag Sauerländer Aarau 1971.

NUMERICAL ANALYSIS OF THE VARIABLES OF SHEAR STRESSES OCCURRING IN THE
NEWTONIAN FLUID FLOWS WITH NON-MONOTONE VARIABLE DYNAMIC VISCOSITY
IN THE CYLINDRICAL MIXER

The mixing process in a mixer means a dislocation of extreme values of a fluid viscosity during its mixing. There are two models of non-monotone dislocations and variables of the fluid dynamic viscosity in the present paper which you can see on Fig.2 and formula (14). The influence of those variables on the distributions on the shear stresses of the Newtonian fluid in the steady laminar flow is shown on Fig.3A,B and formulae (15)&(16). The problem of a fluid mixing is described by the equations of motion which reduce to the ordinary differential linear equation of the second order with the variable coefficients.