ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1992

Seria: MECHANIKA z. 107 Nr kol. 1154

Elżbieta Jarzębowska, Wiesław J.J. Michalski
Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej
Politechnika Warszawska

METODA RUCHU PROGRAMOWEGO W ZASTOSOWANIU DO STEROWANIA UKŁADEM MECHANICZNYM

Streszczenie. W pracy przedstawiono zastosowanie metody ruchu programowego do wyprowadzania równań ruchu programowego. Stanowią one punkt wyjścia do rozwiązywania zadania sterowania układem mechanicznym nieswobodnym z więzami programowymi. Więzy krępujące układ mogą być dowolnego typu i rzędu. Przedstawiono przykładowe sformułowanie więzów programowych dla modelu układu mechanicznego. Wyznaczono parametry kinematyczne w ruchu programowym, obliczono siły sterujące, a następnie zbadano realizację ruchu programowego. Uzyskane wyniki przedyskutowano i przedstawiono na wykresach.

Резюме. В докладе представлено применение метода программного движения при конструировании уравнений программного движения. Они являются исходной точкой для решения задачи управления несвободной механической системы с программными связями. Связи ограничивающие систему могут быть любого типа и ряда. Представлена примерная формулировка программных связей для модели механической системы. Определены кинематические параметры в программном движении, вычислены управляющие силы и исследовано выполнение программного движения. Полученные результаты обслуждены и представлены графически.

Summary. In the paper, the application of program motion method to derivation of program motion equations is presented. This set of equations is the starting-point of solving the control problem of constrained mechanical system with program constraints. Constraints imposed on a system can be of an arbitrary type and order. The example of program constraints formulation for the model of mechanical system is presented. Kinematic parameters of the program motion have been determined, control forces have been computed, and next, the realization of the program motion has been investigated. The results are discussed and presented in figures.

1. WSTĘP

W niniejszej pracy autorzy zajmują się zagadnieniem modelowania układów mechanicznych nieswobodnych, na których ruch nałożone są dodatkowe wymagania. Wymagania takie, jeśli mogą być sformułowane w postaci równań różniczkowych lub algebraicznych, stanowią więzy typu programowego. Działanie takich więzów powoduje, że parametry kinematyczne i dynamiczne układu im podlegającego są odmienne od analogicznych parametrów w ruchu swobodnym. Więzy typu programowego stanowią niemałą klasę więzów [1, 2] i mogą pojawiać się w sposób naturalny jako wymagania typu konstrukcyjnego, technologicznego, wytrzymałościowego sformułowane analitycznie w postaci równań różniczkowych rzędu wyższego niż drugi. Mówimy wtedy o więzach programowych wyższego rzędu. Dodatkowo mogą to być więzy nieholonomiczne.

W klasycznej mechanice analitycznej brak jest metody pozwalającej modelować ruch układów mechanicznych nieswobodnych, skrępowanych więzami rzędu wyższego niż drugi [1].

Metoda ruchu programowego [2, 3], zaliczona do metod mechaniki analitycznej nieklasycznej, pozwala modelować, a następnie podjąć zadanie sterowania ruchem układu mechanicznego zgodnie z wybranym programem.

2. RUCH PROGRAMOWY UKŁADU MECHANICZNEGO

2.1. Model fizyczny

Badany model fizyczny wybranego układu mechanicznego stanowił walec jednorodny, sztywny, podparty sprężyście u podstawy. Rozważano jego ruch płaski oraz założono, że wykonuje małe drgania wokół położenia równowagi [3].

2.2. Model matematyczny

Badamy dynamikę rozważanego ciała sztywnego stawiając dodatkowo wymaganie, aby składowe prędkości pewnego punktu A ciała spełniały wymagania:

$$V_{Ax} = \varphi(t) / \sqrt{1 + \lambda^2(t)}, \qquad V_{Ay} = \lambda(t) V_{Ax}. \tag{1}$$

Przekształcając (1) uwidaczniamy sens fizyczny postawionych wymagań:

$$V_A^2 = V_{Ax}^2 + V_{Ay}^2 = \varphi^2(t). \tag{2}$$

Uwzględniając ponadto następujące związki:

$$V_{Ax} = \dot{x}(t) - \dot{\theta}(t)y_A. \qquad V_{Ay} = \dot{y}(t) + \dot{\theta}(t)x_A \tag{3}$$

oraz różniczkując równanie więzów (2) obustronnie względem czasu otrzymujemy:

$$x(t) = \dot{\varphi}(t)\sqrt{1 + \lambda^2(t)} - \lambda(t)\Big(y(t) + \theta(t)x_A\Big) + \theta(t)y_A \tag{4}$$

gdzie x, y, θ - współrzędne opisujące ruch walca.

Równanie (4) przedstawia więzy programowe nieholonomiczne, liniowe, drugiego rzędu.

Korzystając z nieklasycznej metody konstrukcji równań ruchu programowego [2, 3, 4], zbudowano dla wybranego modelu układu mechanicznego i programu (4) równania ruchu programowego.
Mają one postać:

$$m(1+\lambda^2)y + my_A\lambda(\lambda x_A/y_A - 1)\theta = -Q_x\lambda + Q_y + m\lambda\dot{\varphi}\sqrt{1 + \lambda^2} \tag{5a}$$

$$my\,\lambda(\lambda x\ /y\ - 1)y + \Big(I + my^2(\lambda x\ /y\ - 1)^2\Big)\theta =$$

$$= Q_x y_A(\lambda x_A/y_A - 1) + Q_\theta + my_A\dot{\varphi}(\lambda x_A/y_A - 1)\sqrt{1 + \lambda^2} \tag{5b}$$

gdzie Q_x, Q_y, Q_θ - siły uogólnione oraz dla przejrzystości pominięto czas.

Równania (5) i więzy (4) stanowią komplet równań ruchu programowego.

2.3. Siły sterujące

Zgodnie z metodą ruchu programowego, siły sterujące wyznaczane są jako siły dodatkowe, które należy przyłożyć do układu w celu realizacji ruchu

programowego. Wyznaczono je z następujących zależności:

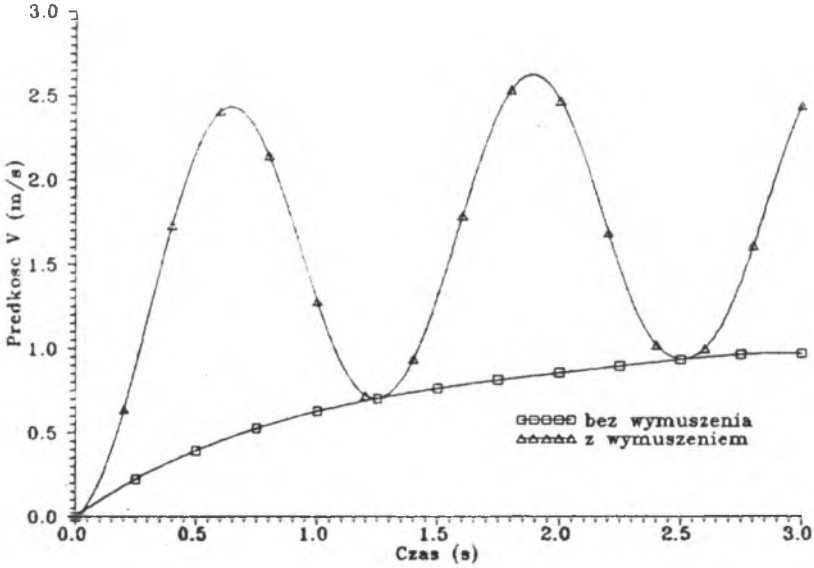
$$mx_p(t) = Q_x + Q_x^{(r)}, \qquad my_p(t) = Q_y + Q_y^{(r)}, \qquad I\vartheta_p(t) = Q_\vartheta + Q_\vartheta^{(r)}, \quad (6)$$

gdzie index "p" przy pochodnych współrzędnych uogólnionych oznacza, że są to współrzędne w ruchu programowym, a "r" postawiono przy poszukiwanych siłach sterujących. Na wykresach przedstawiono je jako funkcje czasu. Są to funkcje ciągłe.

W obu przedstawionych przypadkach siły sterujące doprowadzają do realizacji ruchu programowego. W drugim przypadku siła zewnętrzna Q_x powoduje wytrącanie układu z "krzywej programowej". Siły sterujące (przede wszystkim składowa $Q_x^{(r)}$) w tym przypadku powodują ciągłe doprowadzanie układu do krzywej programowej.

3. WYNIKI

Dla wybranego modelu układu mechanicznego przeprowadzono symulację numeryczną równań ruchu programowego (4) i (5). Przeprowadzono ją dla



Rys. 1. Realizacja programu $V = 1 - e^{-t}$

Fig. 1. Realization of program $V = 1 - e^{-t}$

dwóch rodzajów obciążeń zewnętrznych działających na układ. W wyniku tej symulacji:

a) wyznaczono trajektorie programowe i parametry kinematyczne w ruchu programowym,

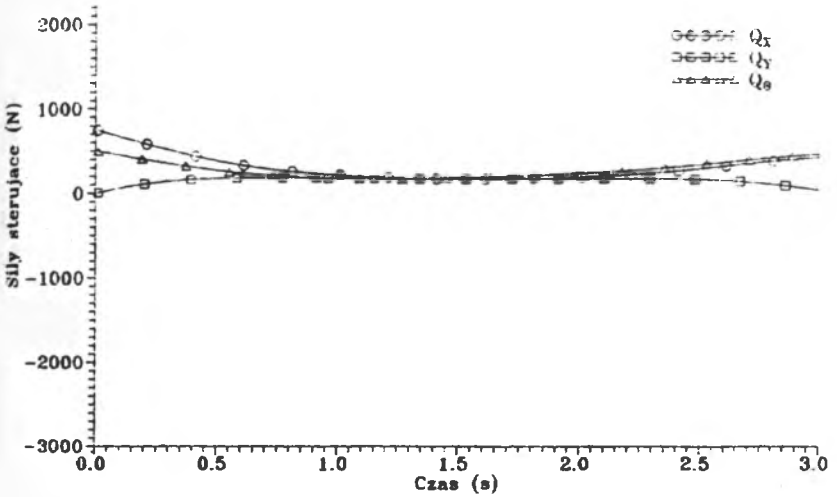
b) wyznaczono "krzywe programowe" obrazujące realizację ruchu programowego przez układ (rys. 1),

c) obliczono siły sterujące (rys. 2, 3),

d) zbadano stateczność ruchu programowego.

Zastosowanie metody opracowanej analitycznie do konkretnego modelu układu mechanicznego i zadanego programu pozwoliło sformułować poniższe wnioski.

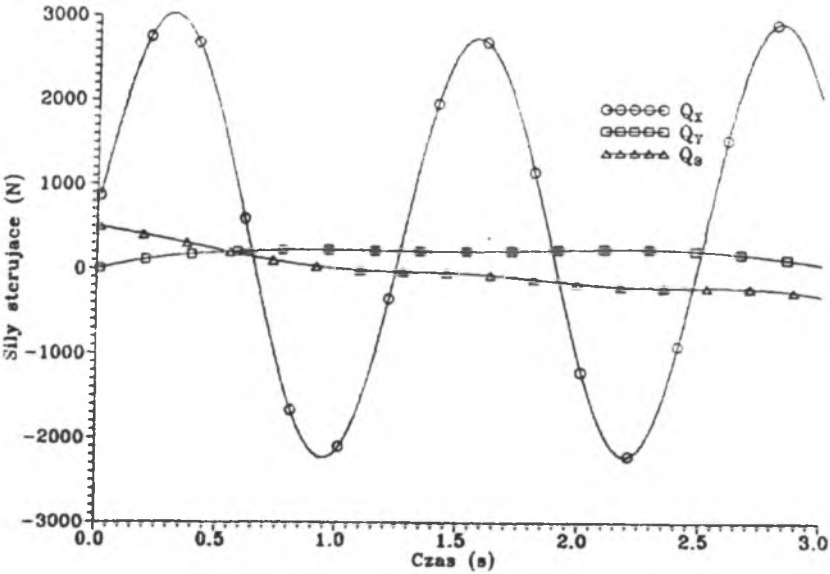
1. Opracowana teoretycznie metoda tzw. ruchu programowego jest efektywna w zakresie generowania równań ruchu programowego i sił sterujących; możliwe jest programowanie ruchu dla dowolnych programów.



Rys. 2. Siły sterujące układem bez wymuszenia

Fig. 2. Forces controlling the system without excitation

2. Dla dość arbitralnie wybranego programu - tak jak to jest w danym przypadku - równania ruchu są niestateczne, chociaż rozwiązania są ograniczone; sterowanie układem przez programowanie ruchu nie zapewnia stateczności.



Rys. 3. Siły sterujące układem z wymuszeniem sinusoidalnym

Fig. 3. Forces controlling the system with sinusoidal excitation

4. PODSUMOWANIE

Przedmiotem badań przedstawionych w niniejszej pracy była klasa układów mechanicznych - układów nieswobodnych skrępowanych więzami typu programowego, w szczególności więzami programowymi nieholonomicznymi wyższego rzędu.

Dla przedstawionego modelu układu mechanicznego przeprowadzono badania obejmujące modelowanie matematyczne układów nieswobodnych, symulację numeryczną dynamicznych równań ruchu, badanie dynamiki w ruchu programowym.

Sterowanie układem odbywało się w sposób ciągły, za pomocą sił sterujących, które także - w danym przypadku - były ciągłe w czasie.

Czas osiągania przez układ "krzywej programowej" był w danym przypadku krótki (około 4 sekund).

Osiągnięte wyniki, dla prostego modelu układu mechanicznego, uwidaczniają potrzebę dalszych badań, głównie w kierunkach:

- modyfikacji modelu fizycznego w celu przybliżenia go do urządzeń

mechanicznych rzeczywistych;

- badania stateczności równań ruchu programowego;
- badania wrażliwości układu na postać więzów programowych, co ma szczególne znaczenie na etapie formułowania analitycznego równania więzów programowych, które może być przybliżeniem wymagań rzeczywistych.

5. UWAGA

Badania zrealizowano w ramach projektu Nr DMS-T/03/413/90-2 MEN 505/092/578/1 ITLiMS finansowanego w roku 1991 przez Komitet Badań Naukowych.

LITERATURA

[1] Gutowski R.: Mechanika analityczna. PWN, Warszawa 1971.

[2] Jarzębowska E.: Zasady wariacyjne i równania ruchu mechaniki analitycznej układów nieswobodnych o zmiennej masie. Praca doktorska. Wydz. MEiL, PW, Warszawa 1988.

[3] Jarzębowska E., Michalski W. J. J.: Zagadnienie programowania ruchu złożonych, nieswobodnych układów mechanicznych. Opracowanie na zlecenie MEN, 1991.

[4] Mangeron D., Deleanu S.: Sur une classe d'equations de la mécanique analytique en sens de Tzénoff. Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences, 15, 1962.

PROGRAM MOTION METHOD APPLIED TO MECHANICAL SYSTEM CONTROL

In the paper, a modelling method - so-called the program motion method - for derivation of program motion equations is presented. The set of equations is the starting-point of solving the control problem of constrained mechanical system with program constraints.

Program constraints are requirements put on dynamic or kinematic features of motion of a mechanical system. They arise in technological, design, or operating processes. In analytical formulation, program

constraints are often nonholonomic constraints of the higher order.

Classical methods in analytical mechanics are suitable for modelling of systems with constraints of up to the second order only [1].

The method for constructing the dynamic equations of motion of a mechanical system with nonholonomic nonlinear program constraints presented herein is based on the Mangeron-Deleanu one [4]. It has been modified and generalized to be applicable to the variable mass and configuration systems with constraints of an arbitrary order and type [2]. It belongs to analytical mechanics methods and as a tool of modelling is more general than those classical, because it includes considerably wide both the class of constraints and the possibilities of motion control of mechanical systems.

The example of program constraints formulation for the model of mechanical system is presented in the paper. Components of the velocity of the selected point of the rigid body are required to satisfy constraints (1). It means that the velocity satisfies (2). Differentiating (2) while accounting for (3) yields (4). The equation (4) represents program constraints. They are nonholonomic, linear and of the second order. Applying the above mentioned method yields equations of program motion (5). Equations (5) and constraints (4) are the complete set of equations of program motion. Control forces are computed from (6) and then have to be applied to the system in order to warrant it will perform the program motion.

The numerical simulation have been conducted. Kinematic parameters and trajectories of the program motion have been obtained, control forces have been computed (Figs 2, 3), and next, the realization of the program motion has been investigated (Fig. 1).

It should be emphasized that the program motion has been unstable even the solutions have been bounded. Hence, program control itself does not guarantee stability.

Further investigations should be conducted, namely:

- modification of the model to be more realistic,
- stability analysis of program motion,
- sensitivity analysis of system to variations of constraints.