

Marek Krawczuk, Wiesław Ostachowicz  
Instytut Maszyn Przepływowych PAN, Gdańsk

## STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA KOLUMNY ZE SZCZELINĄ ZAMYKAJĄCĄ SIĘ

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono model matematyczny drgań poprzecznych kolumny ze szczeliną zamykającą się, obciążonej na końcu zmienną siłą osiową. Uszkodzony przekrój poprzeczny kolumny modelowano elementem sprężystym o podatności obliczonej na podstawie praw mechaniki pękania. Opracowany model wykorzystano do analizy wpływu wielkości i położenia szczeliny na wielkość obszarów stateczności dynamicznej kolumny.

**Резюме.** В работе представлена математическая модель поперечных колебаний колонны с закрывающей трещиной нагруженной на конце переменной силой. Поперечное сечение колонны с трещиной моделировано пружиной, жесткость которой рассчитана законам механики хрупкого разрушения. Разработанная модель принята в анализе влияния величины и оложения трещины на динамическую устойчивость колонна.

**Summary.** The paper presents a mathematical model of transverse vibrations of colum with a closing crack. In damaged cross-sections of column there were applied elastic elements of flexibility calculated on the basis of the laws of fracture mechanics. Making use of the elaborated model there was carried out an analysis of the effect of the magnitude and position of the crack upon the basic instability area of the column.

### 1. WSTĘP

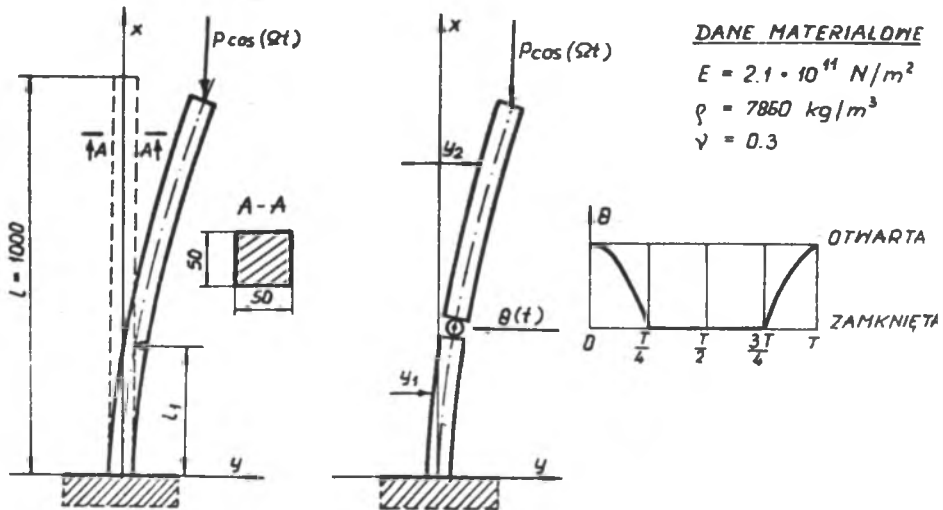
W chwili obecnej większość elementów konstrukcyjnych maszyn i urządzeń eksploatowana jest w zakresie ograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej, co powoduje powstawanie w miejscach spiętrzenia naprężeń pęknięć. Pęknięcia powodują zakłócenia w prawidłowej pracy maszyny, charakteryzujące się wzrostem poziomu drgań, a często nie wykryte w odpowiednim czasie mogą prowadzić do jej zniszczenia.

Szczeliny powodują lokalne zmiany sztywności konstrukcji [1]. Ponieważ sztywność ta zmienia się w obszarze rozpatrywanego elementu

konstrukcyjnego zmianom ulegają jego charakterystyki dynamiczne. Celem niniejszej pracy jest budowa modelu matematycznego i analiza wpływu szczeliny zamykającej się na stateczność dynamiczną belki obciążonej na końcu zmienną siłą osiową. Z przeglądu bibliograficznego [2] dotyczącego dynamiki elementów konstrukcyjnych z pęknięciami wynika, że problem ten do chwili obecnej nie był analizowany.

## 2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Sposób tworzenia modelu dyskretno-ciągłego belki ze szczeliną obciążonej na końcu zmienną siłą osiową przedstawiono na rys.1. Uszkodzoną część belki modelowano sprężyną o podatności zastępczej  $\theta$  obliczonej na podstawie praw mechaniki pęknięcia wg. metody opisanej w [3]. W ten sposób otrzymano układ dwóch odcinków belki połączonych elementem sprężystym. Ponieważ szczelina zamyka się podczas drgań poprzecznych belki podatność sprężyny  $\theta$  jest okresową funkcją czasu - rys.1.



Rys. 1. Model dyskretno-ciągły kolumny ze szczeliną

Fig. 1. A discrete-continuous model of the column with a crack

Cząstkowe równanie różniczkowe opisujące analizowane zagadnienie przyjmuje postać:

$$EJy^{IV}(x, t) + P\cos(\Omega t)y^{II}(x, t) + Cy(x, t) + \rho F\ddot{y}(x, t) = 0, \quad (1)$$

gdzie:  $EJ$  - sztywność giętna kolumny,  
 $P$  - amplituda siły obciążającej kolumnę,  
 $\Omega$  - częstość zmian siły obciążającej,  
 $C$  - współczynnik tłumienia wiskotycznego,  
 $F$  - pole przekroju poprzecznego kolumny,  
 $\rho$  - gęstość materiału kolumny,  
 $y$  - przemieszczenie poprzeczne kolumny,

i spełnia następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} y_1(0, t) &= y_1^I(0, t) = 0, \\ y_1(l_1, t) &= y_2(l_1, t), \\ y_2^I(l_1, t) - y_1^I(l_1, t) &= \theta(t)y_2^{II}(l_1, t), \\ y_1^{II}(l_1, t) &= y_2^{II}(l_1, t), \\ y_1^{III}(l_1, t) &= y_2^{III}(l_1, t), \\ y_2^{II}(l, t) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$EJy_2^{III}(l, t) + P\cos(\Omega t)y_1^I(l, t) = 0,$$

przy czym:  $l_1$  - położenie szczeliny,

$l$  - długość kolumny,

$y_1, y_2$  - przemieszczenia poprzeczne belki po obu stronach szczeliny,

$\theta(t)$  - podatność kolumny w miejscu pęknięcia.

W celu rozwiązania równania (1) z warunkami brzegowymi (2) zastosowano metodę cyfrowej symulacji równań ruchu o zmiennych współczynnikach podaną przez T. Iwatsubo [4]. W metodzie tej należy wyznaczyć pierwiastki charakterystyczne  $k_{ij}$  odpowiadające częstościom własnym drgań kolumny w każdym skończonym kroku czasowym "1" dla analizowanej formy drgań "j".

Równanie charakterystyczne służące do wyznaczenia wartości pierwiastków  $k_{ij}$  otrzymujemy przyjmując następujące funkcje  $X$  dla obu odcinków belki oraz wykorzystując warunki brzegowe (2):

$$X_1(\zeta) = A_1 \sin(\delta_1 \zeta) + B_1 \cos(\delta_1 \zeta) + C_1 \operatorname{sh}(\delta_2 \zeta) + D_1 \operatorname{ch}(\delta_2 \zeta) \quad (3)$$

$$X_2(\zeta) = A_2 \sin(\delta_1 \zeta) + B_2 \cos(\delta_1 \zeta) + C_2 \operatorname{sh}(\delta_2 \zeta) + D_2 \operatorname{ch}(\delta_2 \zeta)$$

gdzie:  $\delta_1^2 = [(4\beta_{1j}^4 + \eta_1^2)^{1/2} + \eta_1] / 2$ ,  $\delta_2^2 = [(4\beta_{1j}^4 + \eta_1^2)^{1/2} - \eta_1] / 2$ ,

$$\beta_{1j} = \rho F k_{1j} / EJ, \quad \eta_1 = P_1 / EJ, \quad \zeta = x/l.$$

Równanie charakterystyczne możemy przedstawić jako:

$$\operatorname{DET} \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_1 & B_2 \\ 0 & \dot{C} \end{bmatrix} = 0, \quad (4)$$

gdzie poszczególne bloki mają postacie:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \delta_1 & 0 & \delta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \sin(\delta_1 e) & \cos(\delta_1 e) & \operatorname{sh}(\delta_2 e) & \operatorname{ch}(\delta_2 e) \\ -\delta_1^2 \sin(\delta_1 e) & -\delta_1^2 \cos(\delta_1 e) & \delta_2^2 \operatorname{sh}(\delta_2 e) & \delta_2^2 \operatorname{ch}(\delta_2 e) \\ -\delta_1^3 \cos(\delta_1 e) & \delta_1^3 \sin(\delta_1 e) & \delta_2^3 \operatorname{ch}(\delta_2 e) & \delta_2^3 \operatorname{sh}(\delta_2 e) \\ \delta_1 \cos(\delta_1 e) & -\delta_1 \sin(\delta_1 e) & \delta_2 \operatorname{ch}(\delta_2 e) & \delta_2 \operatorname{sh}(\delta_2 e) \end{bmatrix}$$

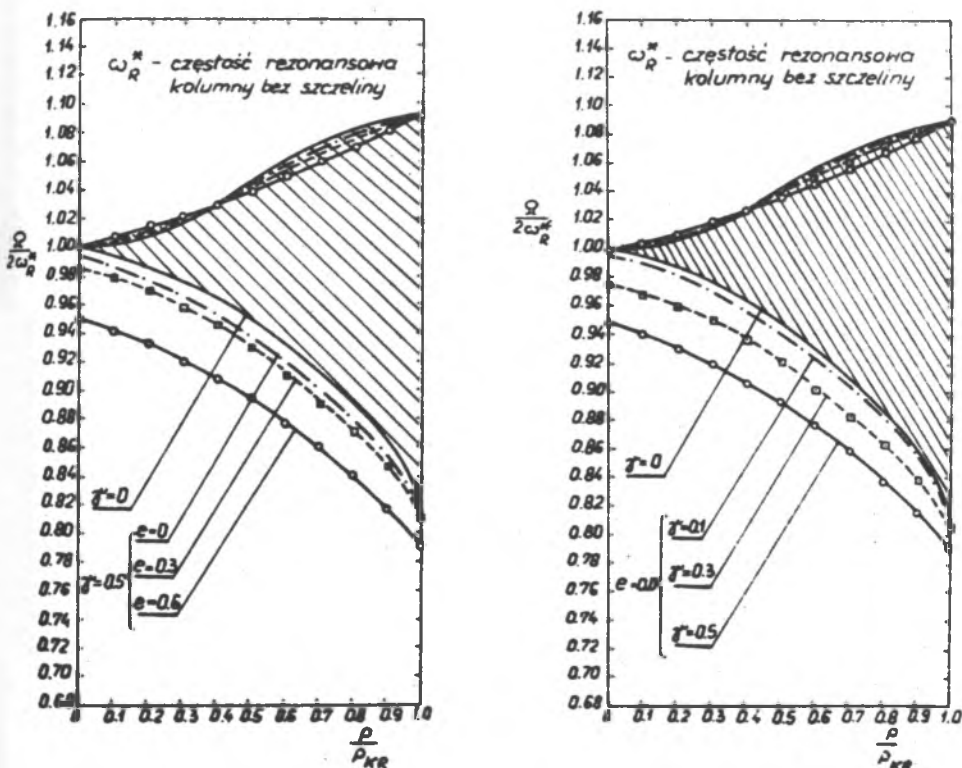
$$B_2 = \begin{bmatrix} -\sin(\delta_1 e) & -\cos(\delta_1 e) & -\operatorname{sh}(\delta_2 e) & -\operatorname{ch}(\delta_2 e) \\ \delta_1^2 \sin(\delta_1 e) & \delta_1^2 \cos(\delta_1 e) & -\delta_2^2 \operatorname{sh}(\delta_2 e) & -\delta_2^2 \operatorname{ch}(\delta_2 e) \\ \delta_1^3 \cos(\delta_1 e) & -\delta_1^3 \sin(\delta_1 e) & -\delta_2^3 \operatorname{ch}(\delta_2 e) & -\delta_2^3 \operatorname{sh}(\delta_2 e) \\ -\delta_1 \cos(\delta_1 e) & \delta_1 \sin(\delta_1 e) & -\delta_2 \operatorname{ch}(\delta_2 e) + & -\delta_2 \operatorname{sh}(\delta_2 e) + \\ -\delta_1^2 \theta \sin(\delta_1 e) & \delta_1^2 \theta \cos(\delta_1 e) & \delta_2^2 \theta \operatorname{sh}(\delta_2 e) & \delta_2^2 \theta \operatorname{ch}(\delta_2 e) \end{bmatrix}$$

$$\dot{C} = \begin{bmatrix} -\delta_1^2 \sin \delta_1 & -\delta_1^2 \cos \delta_1 & \delta_2^2 \operatorname{sh} \delta_2 & \delta_2^2 \operatorname{ch} \delta_2 \\ (-\delta_1^3 + \delta_1 \eta_1^2) \cos \delta_1 & (\delta_1^3 - \delta_1 \eta_1^2) \sin \delta_1 & (\delta_2^3 + \delta_2 \eta_1^2) \operatorname{ch} \delta_2 & (\delta_2^3 + \delta_2 \eta_1^2) \operatorname{sh} \delta_2 \end{bmatrix}$$

przy czym:  $e = l/1$  jest bezwymiarowym położeniem szczeliny.

## 3. PRZYKŁAD OBLICZEŃ

Przykładowe obliczenia numeryczne wykonano dla kolumny o wymiarach i danych materiałowych jak na rys.1 przy zmiennym położeniu szczeliny ( $e=\text{const}$ ,  $\gamma=\text{varia}$ ) i przy stałej jej głębokości ( $\gamma=\text{const}$ ,  $e=\text{varia}$ ). Przyjęto współczynnik tłumienia wiskotycznego  $C=0.0$ . Wyniki obliczeń przedstawia rys.2. Jako kryterium niestabilności przyjęto za Iwanowskim [5] warunek, że jeżeli w ciągu 20 okresów amplituda drgań wzrasta monotonicznie to układ traktujemy jako dynamicznie niestabilny. Jeżeli natomiast w ciągu 40 i więcej okresów amplituda drgań wzrasta nieznacznie lub pozostaje bez zmiany to układ jest stabilny dynamicznie.



Rys. 2. Obszary niestateczności dynamicznej kolumny ze szczeliną  
Fig. 2. The areas of dynamic instability of the column with crack

#### 4. WNIOSKI

Analizując wyniki obliczeń numerycznych należy stwierdzić, że szczelina zamykająca znajdująca się w obszarze badanej kolumny znacznie zwiększa obszary dynamicznie niestateczne. Jest to związane z nałożeniem się na obszary niestateczności dynamicznej pochodzące od zmiennej siły osłowej dodatkowych obszarów niestatecznych wywołanych szczeliną i jej zamykaniem. Z drugiej strony należy stwierdzić, że wielkość obszarów niestateczności dynamicznej silnie zależy od położenia i głębokości szczeliny. Obszary te są największe dla szczelin położonych w miejscu utwierdzenia belki.

#### LITERATURA

- [1] Irwin G.R.: Analysis of stresses and strains near the end of a crack transversing a plate. *Journal Applied Mechanics* 24, 361-367, 1957.
- [2] Wauer J.: On the dynamics of cracked rotors: A literature survey. *Applied Mechanics Reviews* 43, 1, 13-17, 1990.
- [3] Ostachowicz W., Krawczuk M.: Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam. Praca ukaże się w *Journal of Sound and Vibration* 150, 1, 1991.
- [4] Iwatsubo T., Sugiyama Y., Ishihara K.: Stability and non-stationary vibration of columns under periodic loads. *Journal of Sound and Vibration* 23, 2, 245-257, 1972.
- [5] Evan-Iwanowski R.M.: On the parametric response of structures. *Applied Mechanics Reviews* 18, 3, 699-702, 1965.

#### DYNAMIC STABILITY OF THE COLUMN WITH CLOSING CRACK

Cracks occurring in constructional elements cause local stiffness variations of the construction [1]. For the reason that the stiffness varies within the area of construction element under consideration, its dynamic characteristics: the natural vibrations frequencies, the forced vibrations amplitudes and the areas of instability are subjected to variations. This paper is intended to work out a mathematical model of dynamic stability of a column with closing crack (Fig.1) and determine the basic dynamic instability areas in function of its magnitude and position.

A discrete-continuous model of the column with a crack is presented in Fig. 1. The crack occurring in the column was modelled by spring of equivalent flexibility calculated on the basis of the laws of fracture mechanics [3]. The partial differential equation of motion of the column with crack takes form (1) and it should satisfy the boundary conditions (2). In order to solve equation (1) used the method described by Iwatsubo [4].

Exemplary numerical calculations were made for a steel column of dimensions and material constants as in Fig. 1. As the criterion of instability there has been assumed according to Iwanowski [5] the condition that if the vibration amplitude rises monotonically in 20 cycles than the system is treated as dynamically instable. However, if in 40 or more cycles the vibration amplitude rises insignificantly or remains unchanged, the system is dynamically stable. The calculation results are presented in graphic form in Fig. 2.

The areas of instability are function of depth and position of the crack.