ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1990

Seria: GÓRNICTWO z. 189 Nr kol. 1077

Anna KIJEWSKA
Politechnika Śląska w Gliwicach

SPOSOBY PRZEDSTAWIANIA DANYCH W MATEMATYCZNYCH MODELACH SYSTEMÓW KADROWYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono pierwszą fazę informacyjnego zabezpieczania modeli matematycznych opisujących systemy kadrowe. Pokazano sposoby formalizacji danych niezbędnych w tych modelach oraz związki między danymi w modelach deterministycznych, probilistycznych czy strumieniowych. Dane te wchodzą do bazy danych w automatycznym przetwarzaniu informacji.

WPROWADZENIE

Badając systemy kadrowe, analizujemy zachowanie się pojedynczej jednostki w tym systemie, biorąc pod uwagę jej miejsce w klasie.

Pojęcie "klasa" może być interpretowane w zależności od podejścia do strukturalizacji systemu. Na przykład przez klasę będziemy rozumieli grupę specjalistów o tej samej specjalności i tych samych kwalifikacjach, pracowników wykonujących jednakowe bądź porównywalne prace, czy osoby o tym samym stażu pracowniczym. Wprowadzenie pojęcia "klasa" daje możliwość rozbicia kadr systemu organizacyjnego na oddzielne jednorodne w określonym sensie grupy osób, a tym samym na stworzenie niezbędnych przesłanek do modelowania dynamiki systemów kadrowych.

Osoby (pracownicy) mogą przechodzić z jednej klasy do drugiej. Mówimy, że między klasami istnieje związek, jeśli pomiędzy nimi następują przejścia.

Dynamika systemów kadrowych posiadających strukturę przedstawioną w [2] może być opisana za pomocą różnorodnych modeli matematycznych. W literaturze poświęconej matematycznemu modelowaniu systemów socjalnych, do których należą systemy kadrowe, wyróżnia się modele z czasem dyskretnym i ciągłym, modele deterministyczne czy probabilistyczne.

Z punktu widzenia odzwierciedlania rzeczywistego procesu zmieniania się systemów kadrowych najlepiej jest wykorzystywać modele o czasie ciągłym. Do zalet tych modeli należy łatwość obliczeń analitycznych. Wygodnie jest łącznie z modelami o czasie ciągłym wykorzystywać modele o czasie dyskretnym. Charakteryzują się one tym, że po pierwsze - otrzymane w wyniku statystycznych badań dane do obliczeń przedstawiane są w formie dyskretnej, po drugie - przy uzyskaniu liczbowych wyników na komputerze wykorzystuje się algorytmy obliczeniowe wymagające sprowadzenia realizacji ciągłej zadania do postaci dyskretnej i po trzecie - współczesny rozwój teorii rachunku macierzowego pozwala przeprowadzić analityczne opracowanie zadań sformułowanych w formie dyskretnej.

Do klasy modeli zdeterminowanych zaliczymy tu modele proporcjonalnego przemieszczania i modele strumieniowe. Do opisu dynamiki systemów kadrowych najczęściej stosuje się te pierwsze. Podstawowe ich zalety to prostota struktury, przejrzystość oraz wygoda liczbowej realizacji. Za ich pomocą otrzymujemy średnie oszacowania dla procesów dynamiki systemów kadrowych przy różnorodnych wartościach parametrów.

Modele strumieniowe zaczęto stosować dla opisu dynamiki systemów kadrowych stosunkowo niedawno. Szczególność tych modeli leży w tym, że zmianę stanu systemu kadrowego rozpatruje się jako rezultat interakcji dynamicznych strumieni kadrowych. Takie podejście pozwala analizować dynamikę kadr i budować algorytmy optymalnego zarządzania nimi.

Modele probabilistyczne najlepiej uwzględniają stochastyczną naturę dynamiki systemów kadrowych w warunkach istnienia zbioru losowych i nielosowych czynników.

OPIS DANYCH DLA MODELI MATEMATYCZNYCH

W badaniach prognostycznych zmian systemów kadrowych za pomocą modeli matematycznych, a także przy wyborze optymalnego sposobu zarządzania kadrami, niezbędne jest określenie informacji wyjściowych, które dadzą obraz sytuacji ukształtowanej w przeciągu lat w systemie. Dla obliczeń w modelach zarówno statycznych, jak i dynamicznych dane te otrzymuje się w wyniku obróbki bieżącej i sprawozdawczej dokumentacji oddziałowej i kadrowej. Jednakże w analizie dynamiki systemów kadrowych wymagana jest znaczna ilość informacji, przy czym i pracochłonność jej obróbki jest bardzo duża. Dlatego też w rzeczywistych obliczeniach niezbędne jest oparcie się na sposobach automatycznego przetwarzania danych z wykorzystaniem bazy danych systemów kadrowych.

Rozpatrzmy różne formy przedstawiania statystycznej informacji w systemach kadrowych. Statystyczna informacja wyjściowa opisująca dynamikę systemów kadrowych najczęściej jest przedstawiana w postaci stanów i strumieni [2,3]. Rozpatrzmy takie informacje w postaci przedstawionej w tablicy 1. W tym przypadku przez pojęcie "stan" rozumiemy przebywanie osób w danej klasie, a przez pojęcie "strumień" - przejścia osób z jednej klasy do drugiej, wejścia do systemu bądź opuszczenie systemu przez pracowników.
W tabl. 1 przedstawione są liczbowe dane o przemieszczeniach osób z jednej klasy do drugiej ($f_{ji}(t)$), wejściach nowych osób do systemu ($R_j(t)$) i wyjściach z systemu ($w_i(t)$) w ciągu określonego przedziału czasowego Δt (rok,

kwartał, miesiąc itd.), zaczynając od momentu t, a także dane o stanach systemu w momencie $t+\Delta t$.

Tablica 1

Liczba osób przechodzących z j-tej klasy do i-tej w okresie od t do $t+\Delta t$				Liczba osób wchodzących do systemu w okresie od t do $t+\Delta t$	Stan systemu w momencie $t+\Delta t$
$f_{11}(t)$	$f_{12}(t)$	......	$f_{1n}(t)$	$R_1(t)$	$s_1(t+\Delta t)$
$f_{21}(t)$	$f_{22}(t)$	......	$f_{2n}(t)$	$R_2(t)$	$s_2(t+\Delta t)$
......	......	......	......	.....	....
$f_{j1}(t)$	......	$f_{ji}(t)$	$f_{jn}(t)$	$R_j(t)$	$s_j(t+\Delta t)$
......	......	......	......	.....	....
$f_{n1}(t)$	$f_{2n}(t)$	......	$f_{nn}(t)$	$R_n(t)$	$s_n(t+\Delta t)$
$w_1(t)$	$w_2(t)$	......	$w_n(t)$	Liczba osób wychodzących z systemu w okresie od t do $t+\Delta t$	
$s_1(t)$	$s_2(t)$	......	$s_n(t)$	Stan systemu w momencie t	

Sumując elementy i-tej kolumny (strumienie osób z j-tej klasy), otrzymujemy całkowitą liczbę osób w i-tej klasie w momencie czasu t.

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^{n} f_{ji}(t) + w_i(t). \qquad i=1,\dots,n \tag{1}$$

Sumując elementy j-tego wiersza, włączając elementy kolumny wstępujących, otrzymujemy całkowitą liczbę osób w j-tej klasie w momencie czasu $t+\Delta t$.

$$s_j(t+\Delta t) = \sum_{i=1}^{n} f_{ji}(t) + R_j(t), \qquad j=1,\dots,n \tag{2}$$

Informacja wyjściowa w postaci przedstawionej w tabl. 1, może być bezpośrednio wykorzystana w obliczeniach modeli strumieniowych, opisujących dyskretny proces dynamiki systemów kadrowych i zarządzania kadrami.

Z tabl. 1 łatwo można otrzymać dane wyjściowe dla obliczenia w modelach zdeterminowanych współczynników przemieszczeń. Jeżeli każdy strumień w rozpatrywanej kolumnie podzielić przez całkowitą sumę strumieni w kolumnie, to otrzymamy frakcje strumieni wychodzących z każdego stanu oraz względną liczbę osób każdej klasy opuszczającą system. Te wielkości nazwiemy frakcjami przemieszczeń

$$q_{ji}(t) = f_{ji}(t)/s_i(t) \tag{3}$$

$$\gamma_i(t) = w_i(t)/s_i(t) \qquad i,j=1,\dots,n \tag{4}$$

Aby otrzymać względną liczbę wchodzących osób w postaci frakcji wejść, należy podzielić każdy element kolumny wejść przez odpowiadający mu element kolumny stanów w punkcie czasu $t+\Delta t$:

$$r_j(t) = R_j(t)/s_j(t+\Delta t) \tag{5}$$

W ten sposób otrzymamy macierz kwadratową funkcji przemieszczeń Ω, wektor wierszowy frakcji wyjść γ i wektor kolumnowy frakcji wejść r w okresie czasu Δt, poczynając od momentu t, które można przedstawić jak w tablicy 2.

Tablica 2

Frakcje przejść				Frakcje wejść
$q_{11}(t)$	$q_{12}(t)$	......	$q_{1n}(t)$	$r_1(t)$
$q_{21}(t)$	$q_{22}(t)$	......	$q_{2n}(t)$	$r_2(t)$
......	......	......	......	.....
$q_{j1}(t)$	......	$q_{ji}(t)$	$q_{jn}(t)$	$r_j(t)$
......	......	......	......	.....
$q_{n1}(t)$	......	$q_{ni}(t)$	$q_{nn}(t)$	$r_n(t)$
$\gamma_1(t)$	......	$\gamma_i(t)$	$\gamma_n(t)$	Frakcje wyjść

Z tablicy 2 łatwo można otrzymać tablicę intensywności przejść, które są niezbędne w obliczeniach modelu Markowa z czasem ciągłym. Aby określić intensywności przejść (λ_{ji}), wejść (α_j) i wyjść (β_i) pracowników, przedstawione w tablicy 3, wystarczy każdy element tabl. 2 podzielić przez Δt i każdy element wektora kolumnowego wejść pomnożyć przez odpowiadający mu element wektora kolumnowego stanów $s_j(t+\Delta t)$, tzn. zrealizować przekształcenie według wzorów:

$$\lambda_{ji}(t) = q_{ji}(t)/\Delta t, \qquad i,j=1,\dots,n \tag{6}$$

$$\beta_i(t) = \gamma_i(t)/\Delta t, \qquad i=1,\dots,n \tag{7}$$

$$\alpha_j(t+\Delta t) = \frac{r_j(t)}{\Delta t}\, s_j(t+\Delta t) = \frac{R_j(t)}{\Delta t} \tag{8}$$

Tablica 3

Intensywności przejść						Intensywności wejść
λ_{11}	λ_{12}	....	λ_{1i}	....	λ_{1n}	α_1
λ_{21}	λ_{22}	....	λ_{2i}	....	λ_{2n}	α_2
....	....	....	....	....	....	....
λ_{j1}	λ_{j2}	....	λ_{ji}	....	λ_{jn}	α_j
....	....	....	.....	....	....	....
λ_{n1}	λ_{n2}	....	λ_{ni}	....	λ_{nn}	α_n
β_1	β_2	...	β_i	...	β_n	Intensywność wyjść

W obliczeniach modeli Markowa z czasem ciągłym opisujących ruch skierowany kadr wykorzystuje się jako dane wyjściowe wektor intensywności przejść z klasy niższej do wyższej $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})$, wektor intensywności wyjść pracowników z systemu $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)$ i wektor intensywności wejść pracowników do systemu $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ uzyskanych z tablicy 4. Należy przy tym zaznaczyć, że w tym przypadku tabl. 1 nie będzie wypełniona całkowicie, a tylko miejsca odpowiadające niezerowym elementom tabl. 4.

W obliczeniach modeli dyskretno-ciągłych opisujących skierowany ruch kadr stosuje się dane mieszane. Zamiast intensywności przejść zastosujemy średnie czasy przebywania osób w klasach α_i oraz ich dyspersje d_i, $i=1,\dots,n-1$. Wejścia osób wyznacza się w dyskretnych momentach τ i określa wektorami

$$h_1^{(l)} = h_1^{(l)}, h_2^{(l)},\dots,h_i^{(l)},\dots,h_n^{(l)}), \qquad i=1,\dots,n$$

Tablica 4

Intensywności przejść							Intensywności wejść
$1-\lambda_1$	0	....	0	....	....	0	α_1
λ_1	$1-\lambda_2$	....	....	....	....	0	α_2
0	λ_2	....	....	....	....	....	....
....	....	....	....	....	....	....	....
0	0	....	$1-\lambda_i$	....	....	0	α_i
0	0	....	λ_i	....	....	0	....
....	....	....	....	....	....	....	....
0	0	....	....	....	$1-\lambda_{n-1}$	0	....
0	0	....	0	....	λ_{n-1}	0	α_n
β_1	β_2	....	β_i	....	....	β_n	Intensywności wyjść

Tablica 5

Numer klasy	Średnie czasy przebywania w klasie α_1	Dyspersja d_i	Intensywność wyjść β_i	Liczba osób wstępujących do i-tej klasy w l-tym przedziale czasowym			
				1	2	...	m
1	α_1	d_1	β_1	$h_1^{(1)}$	$h_1^{(2)}$	....	$h_1^{(m)}$
2	α_2	d_2	β_2	$h_2^{(1)}$	$h_2^{(2)}$	....	$h_2^{(m)}$
....	.....	....	....	....	....	....	....
i	α_i	d_i	β_i	$h_i^{(1)}$	$h_i^{(2)}$	....	$h_i^{(m)}$
....	....	....	....	....	....	....	....
n	α_n	d_n	β_n	$h_n^{(1)}$	$h_n^{(2)}$	...	$h_n^{(m)}$

gdzie l - numer przedziału czasowego wejścia, a $h^{(l)}$ - liczba osób wchodzących w l-tym przedziale czasu. Wyjścia osób z i-tej klasy systemu wyrażają się przez intensywności wyjść β_i, $i=1,\dots,n$. Dla tego przypadku dane wyjściowe przedstawiono w tablicy 5.

Wartości parametrów β_i pokrywają się z odpowiednimi wartościami parametrów przytoczonymi w tablicy 4. Wartości parametrów $h_i^{(l)}$ zgadzają się z wartościami parametrów α_i, o ile wszystkie przedziały czasu l są jednakowe i równe Δt ($\tau = \Delta t$) i liczba wchodzących osób jest jednakowa dla wszystkich przedziałów czasu. Oprócz tego, w tablicy tej przytoczono wartości parametrów α_i - średnich czasów przebywania osób w i-tej klasie oraz d_i - dyspersji.

Rozpatrzmy bardziej szczegółowo związek między intensywnościami wejść λ_i i średnimi czasami przebywania osób w i-tej klasie α_i, $i=1,\dots,n-1$. Ponieważ wywód jest analogiczny dla dowolnej klasy, możemy w tym miejscu opuścić indeks. Oznaczmy przez F(t) funkcję rozkładu wartości losowej - czasu przebywania pojedynczej osoby w i-tej klasie do momentu przejścia do klasy (i+1), a przez $f(t) = F'(t)$ odpowiednio gęstość rozkładu prawdopodobieństwa. Wtedy

$$\rho(t) = f(t)/(1-F(t)) \tag{9}$$

jest chwilową intensywnością przejść oraz

$$a = \int_0^{\infty} t\, f(t)dt \tag{10}$$

jest średnim czasem przebywania osób w klasie.

Załóżmy, że zliczanie osób w klasie odbywa się w przedziale czasowym $[t, t+\Delta t]$. W punkcie czasu t w klasie było s(t) osób. W przedziale czasu Δt do kolejnej klasy przeszło Δs osób.

Wprowadźmy wielkość losową $\varkappa$ - czas przebywania osoby w badanej klasie w punkcie czasu t. (W procesie stacjonarnym funkcja rozkładu $\varkappa$ jest niezależna od t). Wtedy intensywność przejść osób z czasem przebywania w klasie $\varkappa$ do następnej klasy jest równa $\rho(\varkappa)$ i prawdopodobieństwo warunkowe przejścia jednostki do kolejnej klasy w przedziale czasu $[t, t+\Delta t]$ określa się relacją $\rho(\varkappa)\Delta t + o(\Delta t)$, gdzie $o(\Delta t)$ jest wartością cząstkową wyższego rzędu w porównaniu z $\rho(\varkappa)\Delta t$. Prawdopodobieństwo bezwarunkowe przejścia do kolejnej klasy w przeciągu $[t, t+\Delta t]$ określimy zgodnie z formułą

$$p = \int_{-\infty}^{+\infty} \emptyset(\varkappa)\, \rho(\varkappa)\, d\varkappa \Delta t + o(\Delta t), \tag{11}$$

gdzie $\emptyset(\varkappa)$ - gęstość rozkładu wielkości losowej $\varkappa$.

Zgodnie z rezultatami teorii odnowy dla procesu stacjonarnego, relacja tworząca związek między gęstością wielkości losowej $\varkappa$ i funkcją rozkładu $F(\varkappa)$ ma postać

$$\Phi(\varkappa) = (1-F(t))/\alpha \tag{12}$$

Podstawiając (12) do (11) oraz wykorzystując wartość chwilowej intensywności przejść, otrzymujemy

$$p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-F(\varkappa)}{\alpha} \rho(\varkappa)\, d\varkappa \Delta t + o(\Delta t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\varkappa)}{\alpha}\, d\varkappa \Delta t + o(\Delta t) = \frac{\Delta t}{\alpha} + o(\Delta t) \tag{13}$$

Standardowe oszacowanie prawdopodobieństwa ρ wyrażamy w postaci $\rho = \frac{\Delta s}{s}$. Stąd oszacowanie średniego czasu przebywania jednostek w klasie $\hat{\alpha} = (s/\Delta s)\ \Delta t = 1/\lambda$. W ten sposób dla dowolnego rozkładu otrzymamy rezultat, który jest oczywisty dla rozkładu Poissona. Zawiera się ten wynik w tym, że średnie czasy przebywania w klasie są odwrotnie proporcjonalne do intensywności przejść.

W rozpatrywanym dyskretno-ciągłym modelu odnowy, w którym czas przebywania jednostki w i-tej klasie jest wielkością losową o rozkładzie normalnym, mamy

$$a_i = 1/\lambda_i \qquad i=i,\dots,n-1 \tag{14}$$

W systemie kadrowym o skończonej liczbie klas n, intensywność przejść z ostatniej klasy $\lambda_n = 0$, a średni czas przebywania jednostek w n-tej klasie do momentu przejścia do kolejnej klasy określamy jako równy nieskończoności, co odzwierciedla fakt, że z najwyższej klasy można bądź wyjść z systemu, bądź mogą do niej wejść nowe jednostki (oczywiście w niewielkiej liczbie).

PODSUMOWANIE

Analiza danych, przytoczonych w tablicach, wykazuje związek pomiędzy rozpatrywanymi modelami pod względem zabezpieczenia informacyjnego i podkreśla przechodniość jednego modelu w drugi przy określonych warunkach.

Należy przy tym zauważyć, że różnorodne modele matematyczne odzwierciedlające procesy dynamiki kadrowej pozwalają wyróżnić cechy charakterystyczne systemu, przeanalizować funkcjonowanie systemu w różnych aspektach i wykorzystać dane wyjściowe w formie, która jest najbardziej adekwatna dla badanego procesu.

LITERATURA

1. GRINOLD R.C., MARSHALL K.T.: Manpower Planning Models. North Holland. New York 1977.
2. KIJEWSKA A.: Model symulacyjny racjonalizacji struktury zatrudnienia w Kopalni Węgla Kamiennego. Praca Doktorska. Politechnika Śląska. Gliwice 1984.
3. KIJEWSKA A.: Simulation of a Manpower Planning Model. Sixth Symposium on Microcomputer & Microprocessor Applications. Budapest, Hungary, 1989.

Recenzent
Prof. dr hab. inż. Włodzimierz Sitko

СПОСОБЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДАННЫХ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ КАДРОВЫХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В работе представлена первая фаза информационной защиты математических моделей, описывающих кадровые системы. Показаны способы формализации данных, необходимых в этих моделях, а также связи между данными в детерминистических, вероятностных и струйных моделях. Эти данные входят в базу данных системы автоматической обработки данных.

SOME METHODS OF PRESENTING THE DATA IN THE MATHEMATICAL MODELS OF STAFF SYSTEMS

S u m m a r y

Presented in the paper is the first phase of the informational protection of the mathematical models describing staff systems. The methods of formalization of the data necessary in these models and the relations between the data in the deterministic, probabilistic and stream models have been shown. The above data are included in the data base in the automatic information processing.