

Michał CIAŁKOWSKI

ANALIZA OBCIĄŻENIA TERMICZNEGO PŁASZCZA CYSTERNY DO PRZEWOZU CIEKŁYCH GAZÓW

Streszczenie. W pracy przedstawiono zagadnienia optymalnego procesu wymrażania płaszczu cystermy z punktu widzenia nieprzekroczenia dopuszczalnych naprężeń. W szczególności sformułowano dwa funkcjonały jakości, których optymalizacja prowadzi do uzyskania charakterystyki temperaturowej procesu wymrażania. Rozważania teoretyczne poparto przykładami numerycznymi analizując wpływ grubości płaszczu na rozkład naprężeń termicznych z zachowaniem warunku $\sigma_{red} \leq \sigma_{dop}$.

A THERMAL LOAD ANALYSIS OF A TANK SHELL FOR LIQUID GAS TRANSPORT

Summary. Problems of an optimum low-temperature treatment process of a tank shell at allowable stresses being not exceeded, have been presented in this paper. In particular, there have been formulated two quality functionals, the optimization of which results in a temperature characteristics of the low-temperature treatment. Theoretical considerations have been supported with numerical examples analysing the influence of shell thickness thermal stresses distribution, at $\sigma_{red} \leq \sigma_{dop}$ condition preserved.

ANALYSE DER WÄRMEBELASTUNG DES MANTELS EINER ZUM TRANSPORT FLÜSSIGEN GASES DIENENDEN ZISTERNE

Zusammenfassung. In der Praxis man hat ziemlich oft mit großen thermischen Belastung zu tun. Zu diesen Fällen gehören Konstruktionen die sowohl in hohen als auch in niedrigen Temperaturen arbeiten. Von der Bedeutung ist die Steuerung mit der Randbedingung erster Art, um die thermische Spannung in gegeben Zeitintervall nicht zu überschreiten. In der Arbeit wurde dieses Problem gelöst mit der Annahme der linearen Wärmegleichung und Elastizitätstheorie. Das Problem wurde am Beispiel der eindimensionalen Wärmegleichung für einen Zylinder mit unbekannter Randbedingung erster Art auf der inneren Oberfläche. Die Oberflächentemperaturverteilung wurde mit

der Berücksichtigung der zulässigen Spannung berechnet. Das führt zur Aufgabe der quadratischen Programmierung. Die theoretischen Betrachtungen wurden mit numerischen Beispielen bestätigt.

WSTĘP

W wielu konstrukcjach metalowych istotny wpływ na ich trwałość ma zmienne pole temperatur. Zachodzi to zarówno w zakresie wysokich, jak również bardzo niskich temperatur. W trakcie eksploatacji urządzeń pracujących w zakresie dużych i gwałtownych zmian temperatur istotnego znaczenia nabiera wielkość czasu, po upływie którego wielkość naprężeń zredukowanych nie powoduje zagrożenia dla konstrukcji. Z drugiej strony nie mniejszego znaczenia nabiera wyznaczenie optymalnej charakterystyki nagrzewania (np. turbiny ciepłone) lub charakterystyki wymrażania (np. cysterny do przewozu skroplonych gazów, zbiorniki do ich magazynowania), to znaczy wyznaczenie rozkładu temperatury w funkcji czasu powierzchni nagrzewanej lub ziębionej, aby nie przekroczyć dopuszczalnych naprężeń w materiale konstrukcji. Tak postawione zadanie prowadzi do zagadnienia programowania kwadratowego z ograniczeniami. Rozwiązanie tego zagadnienia pozwala na wyznaczenie optymalnych parametrów pracy konstrukcji, jak na przykład czasu ponownego wygrzewania (wymrażania) po odstawieniu urządzenia z eksploatacji.

Zagadnienia naprężeń termicznych były przedmiotem wielu prac o znaczeniu podstawowym, są to między innymi prace: W. Nowacki [6], E. Melan i H. Parkus [7], B.A. Boley i J.H. Weiner [1], H. Parkus [9], jak również T. Chmielniak i G. Kosman [2], T. Chmielniak, G. Kosman i A. Rusin [3], Z. Orłóś (red.) [8].

1. ZAGADNIENIA PROSTE

W pracy rozważymy równanie jednowymiarowe niestacjonarnego przewodnictwa cieplnego w postaci:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1 - 2\delta}{x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \begin{array}{l} t \in (0, \infty) \\ x \in (x_0, 1) \end{array} \quad (1)$$

gdzie parametr δ zależy od kształtu ciała

$$\delta = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{kula (warstwa kuli)} \\ 0 & \text{walec (rura)} \\ \frac{1}{2} & \text{płyta (warstwa płaska)} \end{cases}$$

z warunkiem początkowym

$$T(x, 0) = T^0(x) \quad x \in (x_0, 1) \quad (2)$$

oraz warunkiem brzegowym

$$T(x_0, t) = f(t) \quad t > 0 \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=1} = 0$$

Zagadnienie początkowo-brzegowe (1)–(3) rozwiążemy za pomocą metody elementu skończonego. Równanie (1) sprowadzimy do dogodniejszej postaci. Mianowicie mnożąc równanie (1) przez funkcję $x^{1-2\delta}$, otrzymujemy:

$$x^{1-2\delta} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{1-2\delta} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (4)$$

Zakładamy liniową interpolację funkcji $T(x, t)$ względem zmiennej x .

Funkcja bazowa $\varphi_i(x)$ ma postać:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 1 - \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0 & x \in (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases} \quad (5)$$

oraz

$$T(x, t) = \sum_{i=0}^{N+1} T_i(t) \cdot \varphi_i(x) \quad (6)$$

Dla równomiernego podziału przedziału $(x_0, 1)$ z krokiem h mamy

$$x_i = x_0 + i \cdot h \quad i = 0, 1, 2, \dots, N + 1, \quad h = \frac{1 - x_0}{N + 1}$$

Dowolną funkcję ciągłą $v(x)$ możemy przedstawić w postaci (6)

$$v(t) = \sum_{i=0}^{N+1} v_i(t) \cdot \varphi_i(x) \quad (7)$$

W celu uzyskania równania wariacyjnego odpowiadającego równaniu (4) pomnożymy to równanie przez funkcję $v(x)$ i scałkujemy przez części, stąd:

$$\int_{x_0}^1 v(x) x^{1-2\delta} \frac{\partial T}{\partial t} dx = \int_{x_0}^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{1-2\delta} \frac{\partial T}{\partial x} \right) v(x) \cdot dx \quad (8)$$

Dokonując całkowania prawej strony otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{1-2\delta} \frac{\partial T}{\partial x} \right) v(x) \cdot dx &= x^{1-2\delta} \frac{\partial T}{\partial x} v(x) \Big|_{x_0}^1 - \int_{x_0}^1 x^{1-2\delta} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = \\ &= - \int_{x_0}^1 x^{1-2\delta} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx + x^{1-2\delta} \frac{\partial T}{\partial x} v(x) \Big|_{x_0}^1 \end{aligned}$$

Zatem równanie (8) ma postać

$$\int_{x_0}^1 v(x) x^{1-2\delta} \frac{\partial T}{\partial t} dx = - \int_{x_0}^1 x^{1-2\delta} \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (9)$$

Postać równania wariacyjnego nie zmienia się dla następujących warunków brzegowych

	powierzchnia $x = x_0$	powierzchnia $x = 1$
a)	I rodzaju $(v(x_0) = 0)$	I rodzaju $(v(x_0) = 0)$
b)	I rodzaju $(v(x_0) = 0)$	II rodzaju $\left(\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \right)$
c)	II rodzaju $\left(\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \right)$	I rodzaju $(v(1) = 0)$
d)	II rodzaju $\left(\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \right)$	II rodzaju $\left(\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \right)$

Przypadek a) ma charakter ogólny. Przypadek b) lub c) odpowiada przepływowi ciepła z jedną powierzchnią adiabatyczną, natomiast przypadkowi d) przepływ ciepła wewnątrz ciała z dwoma powierzchniami adiabatycznymi. Dla warunków a, b, c, d będzie zachodzić znikanie członu

$$x^{1-2\delta} \left. \frac{\partial T}{\partial x} v(x) \right|_{x_0}^1$$

Z uwzględnieniem rodzaju warunków brzegowych opisanych powyżej równanie wariacyjne przyjmuje postać:

$$\int_{x_0}^1 v(x) x^{1-2\delta} \frac{\partial T}{\partial t} dx = - \int_{x_0}^1 x^{1-2\delta} \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (9a)$$

Z praktycznego punktu widzenia interesującym przypadkiem jest przypadek b) odpowiadający izolacji cieplnej ścianki zewnętrznej (kadłub turbin ciepłych, cysterna do przewozu ciekłych gazów, kotły parowe). Uwzględnienie warunku b) w równaniu (9a) spowoduje modyfikację układu równań odpowiadającemu równaniu (9a). W dalszym ciągu uwzględniamy warunek brzegowy typu a oraz b.

Całkując równanie (9) w przedziale czasu $\langle t - \Delta t, t \rangle$ dostajemy:

$$\int_{x_0}^1 x^{1-2\delta} \cdot v(x) [T(x, t) - T(x, t - \Delta t)] dx = - \int_{t - \Delta t}^t \int_{x_0}^1 x^{1-2\delta} \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} dx dt \quad (10)$$

Równanie (10) stanowi równanie wariacyjne dla równania przewodnictwa cieplnego (4). Równanie (10) rozwiążemy wykorzystując przedstawienie funkcji niewiadomej $T(x, t)$ wyrażone zależnością (6), a dla funkcji $v(x)$ wyrażone zależnością (7). Funkcje (6) i (7) są funkcjami klasy $H^1(\langle x_0, 1 \rangle)$. Zatem mamy:

$$\sum_{k=1}^N v_k \left\{ \int_{x_0}^1 x^{1-2\delta} \cdot \varphi_k(x) \cdot \sum_{i=1}^{N+1} [T_i(t) - T_i(t - \Delta t)] \varphi_i(x) dx + \right. \\ \left. + \int_{t - \Delta t}^t \int_{x_0}^1 x^{1-2\delta} \cdot \sum_{i=1}^{N+1} T_i(x) \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} dx dt \right\} = 0 \quad (11)$$

a ze względu na dowolność wielkości v_k otrzymujemy

$$\sum_{i=0}^{N+1} \left\{ [T_i(t) - T_i(t - \Delta t)] \int_{x_0}^1 x^{1-2\delta} \cdot \varphi_k(x) \cdot \varphi_i(x) dx + \right. \\ \left. + \int_{t-\Delta t}^t T_i(t) dt \int_{x_0}^1 x^{1-2\delta} \cdot \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} dx dt \right\} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (12)$$

Ze względu na rozłączne nośniki funkcji $\varphi_k(x) \cdot \varphi_i(x)$ dla $k \neq (i - 1, i, i + 1)$

$$\sum_{i=k-1}^{k+1} \left\{ [T_i(t) - T_i(t - \Delta t)] \int_{x_0}^1 x^{1-2\delta} \cdot \varphi_k(x) \cdot \varphi_i(x) dx + \right. \\ \left. + \int_{t-\Delta t}^t T_i(t) dt \int_{x_0}^1 x^{1-2\delta} \cdot \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} dx dt \right\} = 0, \quad 1 \leq k \leq N \quad (13)$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\left. \begin{aligned} A_{ik} &= \int_{x_0}^1 x^{1-2\delta} \cdot \varphi_k(x) \cdot \varphi_i(x) dx = A_{ki} \\ B_{ik} &= \int_{x_0}^1 x^{1-2\delta} \cdot \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} dx = B_{ki} \\ T_i(t) &= T_i^n \quad T_i(t - \Delta t) = T_i^{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

oraz obliczając całkę po czasie

$$\int_{t-\Delta t}^t T_i(t) dt \approx [\beta T_i(t) + (1 - \beta) \cdot T_i(t - \Delta)] \cdot \Delta t = \\ = \Delta t [\beta \cdot T_i^n + (1 - \beta) \cdot T_i^{n-1}] \quad \beta \in \langle 0, 1 \rangle \quad (15)$$

z parametrem β określającym stopień niejawności schematu różnicowego otrzymujemy dla równania (13) bardziej zwartą postać

$$\sum_{i=k-1}^{k+1} \left(T_i^n \cdot a_{ki} - T_i^{n-1} \cdot b_{ik} \right) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (16)$$

gdzie:

$$a_{ik} = A_{ik} + \Delta t \cdot \beta \cdot B_{ik} = a_{ki}$$

$$b_{ik} = A_{ik} - \Delta t \cdot (1 - \beta) \cdot B_{ik} = b_{ki}$$

Dla każdego węzła siatki równanie (16) możemy napisać następująco

$$\begin{aligned} & T_{k-1}^n \cdot a_{k,k-1} + T_k^n \cdot a_{kk} + T_{k+1}^n \cdot a_{k,k+1} = \\ & = T_{k-1}^{n-1} \cdot b_{k,k-1} + T_k^{n-1} \cdot b_{kk} + T_{k+1}^{n-1} \cdot b_{k,k+1} \quad k = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (17)$$

lub w postaci macierzowej

$$[A] \{T^n\} = [B] \{T^{n-1}\} - \{a_{10} \cdot T_0^n, 0, \dots, 0\} + \{b_{10} \cdot T_0^{n-1}, 0, \dots, 0\}$$

Wprowadźmy oznaczenie temperatury wewnętrznej obszaru i na brzegu następująco: $\Theta_0 = T_0$, $v_{N+1} = T_{N+1}$, $v_i = T_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, wtedy równanie (17) przyjmie postać

$$\begin{matrix} [A] \{v^n\} = [B] \{v^{n-1}\} - \{a_{10} \cdot \Theta_0^n, 0, \dots, 0\}^T + \{b_{10} \cdot \Theta_0^{n-1}, 0, \dots, 0\}^T \\ (N+1)(N+1) \quad (N+1)(N+1) \\ (N+1) \times 1 \quad \quad \quad N \times 1 \end{matrix}$$

albo po odwróceniu macierzy [A]

$$\begin{aligned} \{v^n\} &= [A^{-1}] [B] \{v^{n-1}\} + \{A_{ji}^{-1}\}_{j=1}^{N+1} \cdot (b_{10} \cdot \Theta_0^{n-1} - a_{10} \cdot \Theta_0^n) \\ &= [AB] \{v^{n-1}\} + [E] \Theta_0^{n-1} - [F] \Theta_0^n \\ & \quad \quad \quad (N+1)(N+1) \quad \quad \quad N \times 2 \quad 2 \times 1 \quad N \times 2 \quad 2 \times 1 \\ & \quad \quad \quad (N+1) \times 1 \end{aligned} \quad (18)$$

lub dla punktu wewnętrznego ($1 \leq l \leq N$)

$$v_l^n = \sum_{k=1}^N AB_{lk} \cdot v_k^{n-1} + E_l \Theta_0^{n-1} - F_l \Theta_0^n \quad (18a)$$

Rozwiązując równanie rekurencyjne (18) dostajemy

$$\{v^n\} = ([AB])^n \cdot \{v^0\} + \sum_{i=1}^n ([AB])^{n-1} ([E]) \Theta_0^{i-1} - [F] \Theta_0^i \quad (19)$$

Rozwiązanie (19) będzie zawsze zbieżne, jeśli norma spektralna macierzy $[AB]$, $\rho_s([AB]) < 1$. Korzystanie ze wzoru (19) w celu wyznaczenia temperatur w kolejnych chwilach czasu jest bardziej kłopotliwe aniżeli korzystanie z zależności (18). We wzorze (19) wymaga się potęgowania macierzy, a w (18) tylko mnożenia przez wektor. Jednakże do analizy szybkości zanikania wpływu temperatury początkowej na chwilę bieżącą, bardziej odpowiedni jest związek (19).

Zauważmy cenną własność macierzy $[AB]$. Im mniejsza jest wartość promienia spektralnego macierzy $[AB]$, tym szybciej zanika wpływ temperatury początkowej $\{v^0\}$ na temperaturę $\{v^n\}$, mianowicie mamy oszacowanie

$$\| \{v^n\} \| \leq \| [AB]^n \| \cdot \| \{v^0\} \| + \| \sum_{i=1}^n ([AB])^{n-1} ([E]) \cdot \{ \Theta^{i-1} \} - [F] \{ \Theta^i \} \| \quad (20)$$

Powyzsza własność jest ważna przy rozpatrywaniu stabilności zagadnienia.

Do dalszych rozważań wykorzystamy zależność (19), którą przekształcimy do postaci bardziej przydatnej w obliczeniach numerycznych, mianowicie:

$$\{v^n\} = [AB]^n \{v^0\} + \sum_{i=1}^{n+1} \{C^{n+2-i}\} \Theta_0^{i-1} \quad (21)$$

$$\{C^{n+1}\} = [AB]^{n-1} \{E\}, \quad \{C^j\} = [AB]^{j-2} \{E\} - [AB]^{j-1} \{F\},$$

$$D2 \leq j \leq n, \quad \{C^1\} = - [AB]^0 \{F\}$$

Do wyznaczenia rozkładu temperatur w chwili $k \leq n$ będzie użyteczna inna postać wzoru (19). Wydzielając z zależności (19) Θ_0^0 temperaturę w chwili $\tau = 0$, oraz Θ_0^k temperaturę w chwili końcowej $\tau = \tau_k$, otrzymujemy

$$\{v^k\} = \{ZK\} + \{ZKE\} \cdot \Theta_0^0 + \sum_{i=1}^{k-1} \{ZEF^i\} \cdot \Theta_0^i - \{F\} \cdot \Theta_0^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (22)$$

gdzie:

$$\{ZK\} = [AB]^k \cdot \{v\}^0, \quad \{ZKE\} = [AB]^{k-1} \{E\}$$

$$\{ZEF^i\} = [AB]^{k-1-i} (\{E\} - [AB] \{F\})$$

2. WYZNACZENIE NAPRĘŻEŃ TERMICZNYCH W WALCU Z OTWOREM KOŁOWYM

Dla walca z otworem kołowym o promieniu wewnętrznym a oraz zewnętrznym b przy swobodnie przemieszczających się przekrojach poprzecznych składowe stanu naprężania wyrażają się wzorami [4]:

$$\sigma_r = \frac{E\beta T_w}{1-\nu} \frac{1}{\xi^2} \left[\frac{\xi^2 - \xi_1^2}{1 - \xi_1^2} \int_{\xi_1}^{\xi} \xi \frac{T(\xi)}{T_w} d\xi - \int_{\xi_1}^{\xi} \xi \cdot T(\xi) d\xi \right] \quad (23)$$

$$\sigma_p = \frac{E\beta T_w}{1-\nu} \left[\frac{\xi^2 + \xi_1^2}{1 - \xi_1^2} \cdot \frac{1}{\xi^2} \int_{\xi_1}^{\xi} \xi \frac{T(\xi)}{T_w} d\xi + \frac{1}{\xi^2} \int_{\xi_1}^{\xi} \xi \cdot T(\xi) d\xi - \frac{T(\xi)}{T_w} \right] \quad (24)$$

$$\sigma_z = \frac{E\beta T_w}{1-\nu} \left[\frac{2}{1 - \xi_1^2} \int_{\xi_1}^{\xi} \xi \frac{T(\xi)}{T_w} d\xi - \frac{T(\xi)}{T_w} \right] \quad (25)$$

$$\xi = \frac{r}{R_w}$$

gdzie T_w jest temperaturą odniesienia.

Dzieląc przedział $\langle \xi_1, 1 \rangle$, 1 na $N + 1$ podprzedziałów, całkę ze zmienną górną granicą możemy wyrazić w postaci macierzowej

$$\int_{\xi_1}^{\xi^i} \xi \cdot \tilde{T}(\xi) d\xi = [CAL(i, j)] \{ \tilde{T}(j) \} \quad i, j = 1, 2, \dots, N + 2$$

stąd

$$\begin{aligned} \{ \sigma_r(\xi_i) \} &= \frac{E\beta T_w}{1-\nu} \cdot \frac{1}{\xi_i^2} \left(\frac{\xi^2 - \xi_1^2}{1 - \xi_1^2} [CAL(N+2, j)] - [CAL(j, j)] \right) \{ \tilde{T}(j) \} = \\ &= \frac{E\beta T_w}{1-\nu} [SIGR(i, j)] \{ \tilde{T}(j) \} = \frac{E\beta T_w}{1-\nu} [SIGR] \{ \tilde{T} \} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \{ \sigma_\varphi(\xi_i) \} &= \frac{E\beta T_w}{1-\nu} \left(\frac{\xi^2 - \xi_1^2}{1 - \xi_1^2} \frac{1}{\xi_i^2} [CAL(N+2, j)] + [CAL(j, j)] - [I(i, j)] \right) \{ \tilde{T}(j) \} = \\ &= \frac{E\beta T_w}{1-\nu} [SIGT(i, j)] \{ \tilde{T}(j) \} = \frac{E\beta T_w}{1-\nu} [SIGT] \{ \tilde{T} \} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \{\sigma_z(\xi_i)\} &= \frac{E\beta T_w}{1-\nu} \left(\frac{2}{1-\xi_1^2} [\text{CAL}(N+2, j)] - [\text{I}(j, j)] \right) \{\tilde{T}(j)\} = \\ &= \frac{E\beta T_w}{1-\nu} [\text{SIGZ}(i, j)] \{\tilde{T}(j)\} = \frac{E\beta T_w}{1-\nu} [\text{SIGZT}] \{\tilde{T}\} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\tilde{T} = \frac{T}{T_w}$$

Ze względu na fakt, że stałe pole temperatury nie wywołuje naprężeń, otrzymujemy

$$\int_{\xi_1}^{\xi_i} \xi \cdot 1 \cdot d\xi = \frac{1}{2} (\xi_i^2 - \xi_1^2) = \sum_{j=1}^{N+2} \text{CAL}(i, j)$$

Zależność ta jest bardzo użyteczna przy badaniu poprawności wyznaczania macierzy [CAL].

3. WPŁYW TEMPERATURY NA ROZKŁAD NAPRĘŻEŃ W PŁASZCZU CYSTERNY

Cysterny do przewozu ciekłych gazów pracują w niskich temperaturach i w procesie wymrażania w płaszczu cysterny powstają duże dodatnie naprężenia obwodowe jak również względnie duże naprężenia obwodowe pochodzące od działania ciśnienia wewnętrznego $p_w > p_z$. W skrajnych przypadkach sumaryczne naprężenia przekraczają naprężenia dopuszczalne. Istotne zatem staje się wyznaczenie charakterystyki wymrażania z punktu widzenia

- nieprzekroczenia dopuszczalnych naprężeń termicznych,
- minimalnego czasu wymrażania t_{\min} , przy którym różnica temperatur spełnia nierówność

$$\int_{R_w}^{R_z} (T(r, t_{\min}) - T_\infty)^2 dr \Big|_{(R_z - R_w)} \leq \delta \quad (29)$$

Największe naprężenia termiczne powstaną dla $r = R_w$ i szoku termicznego, to znaczy, gdy temperatura $T(R_w, \tau) = T_p = \text{const}$, $T(r, 0) = 0$. Innymi słowy, rozważymy wpływ grubości płaszcza cysterny na wielkość naprężeń termicznych dla warunku brzegowego I rodzaju. W przypadku zmiennej temperatury brzegu zagadnienie optymalnego wyznaczenia charakterystyki wymrażania

należy rozwiązać z uwzględnieniem warunku dopuszczalnych naprężeń termicznych oraz minimalnego czasu wymrażania. Zagadnienie to możemy sformułować następująco:

Wyznaczyć przebieg funkcji temperatury $T(r = R_w, \tau) = f(\tau)$, który spowoduje nieprzekroczenie naprężeń dopuszczalnych w czasie $0 \leq \tau \leq \tau_k$ i dla czasu końcowego $\tau = \tau_k$ zminimalizuje całkę

$$I_T = \int_{R_w}^{R_z} [T(r, \tau_k) - T_\infty(r)]^2 dr = \min \quad (30)$$

gdzie temperatura $T_\infty(r)$ odpowiada stanowi ustalonemu.

W przypadku cysterny do przewozu gazów skroplonych możemy przyjąć, że temperatura $T_\infty(r) = \text{const}$ i jest równa temperaturze czynnika przewożonego. W wyniku jednak przepływu ciepła przez osłonę izolacyjną zbiornika będzie następował nieznaczny przepływ ciepła, którego przepływ określa z dobrym przybliżeniem stacjonarne równanie przewodnictwa cieplnego (można zaniedbać zmianę pojemności cieplnej ciekłego gazu wynikłej z przepływu ciepła przez osłonę). Stan określony temperaturą $T_\infty(r)$ odpowiada stanowi eksploatacji cysterny. Dla stałej temperatury T_∞ otrzymujemy stan beznaprężeniowy. Zatem powyższe kryterium można wyrazić również w postaci

$$I_{\sigma_{red}} = \int_{R_w}^{R_z} [\sigma_{red}(r, \tau_k) - \sigma_{red}(T_\infty)]^2 dr = \min \quad (31)$$

Funkcjonał I_T jest funkcjonałem kwadratowym, natomiast funkcjonał $I_{\sigma_{red}}$ nie jest funkcjonałem kwadratowym ze względu na nieliniową zależność od temperatury, mianowicie

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2]}$$

a naprężenia $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$ jako funkcje temperatury możemy wyrazić jako wektory, których kolejne elementy odpowiadają wartościom naprężeń w kolejnych punktach siatki

$$\{\sigma_r\} = [\text{SIGR}] \cdot \{T\} \quad \sigma_{r,i} = \sum_{j=1}^{N+2} \text{SIGR}_{ij} \cdot T_j \quad (32)$$

$$\{\sigma_{\varphi}\} = [\text{SIGT}] \cdot \{T\} \quad \sigma_{\varphi, i} = \sum_{j=1}^{N+2} \text{SIGT}_{ij} \cdot T_j \quad (33)$$

$$\{\sigma_z\} = [\text{SIGZ}] \cdot \{T\} \quad \sigma_{z, i} = \sum_{j=1}^{N+2} \text{SIGZ}_{ij} \cdot T_j \quad (34)$$

stąd dla punktu o numerze „i” mamy:

$$(\sigma_{r, i} - \sigma_{\varphi, i})^2 = \left[\sum_j (\text{SIGR}_{ij} - \text{SIGT}_{ij}) \cdot T_j \right]^2 = [\{\text{SRT}^i\}^T \{T\}]^2 =$$

$$= \{T\}^T \{\text{SRT}^i\} \{\text{SRT}^i\}^T \{T\}$$

$$(\sigma_{r, i} - \sigma_{z, i})^2 = \left[\sum_j (\text{SIGR}_{ij} - \text{SIGZ}_{ij}) \cdot T_j \right]^2 = [\{\text{SRZ}^i\}^T \{T\}]^2 =$$

$$= \{T\}^T \{\text{SRZ}^i\} \{\text{SRZ}^i\}^T \{T\}$$

$$(\sigma_{\varphi, i} - \sigma_{z, i})^2 = \left[\sum_j (\text{SIGT}_{ij} - \text{SIGZ}_{ij}) \cdot T_j \right]^2 = [\{\text{STZ}^i\}^T \{T\}]^2 =$$

$$= \{T\}^T \{\text{STZ}^i\} \{\text{STZ}^i\}^T \{T\}$$

oraz

$$2 \cdot \sigma_{\text{red}, 1}^2 = \{T\}^T \left(\{\text{SRT}^i\} \{\text{SRT}^i\}^T + \{\text{SRT}^i\} \{\text{SRZ}^i\}^T + \right. \\ \left. + \{\text{STZ}^i\} \{\text{STZ}^i\}^T \right) \{T\} = \{T\}^t \{\text{SRED}^i\} \{T\} \quad (35)$$

Funkcjonał $I_{\sigma_{\text{red}}}$ dla niezerowej funkcji $\sigma_{\text{red}}(T_{\infty})$ zawiera wyrażenie pierwiastkowe, co sprawia duże kłopoty numeryczne. W celu uniknięcia tych niedogodności możemy przyjąć, że stan końcowy jest stanem beznapiężeń $\sigma_{\text{red}}(T_{\infty}) = 0$, co jest konsekwencją przyjęcia stałej temperatury T_{∞} . Założenie to jest technicznie usprawiedliwione przy przyjęciu dostatecznie dobrej izolacji zewnętrznej i długiego czasu wymrażania. Dla takich założeń funkcyjnał $I_{\sigma_{\text{red}}}$ przyjmuje postać

$$I_{\sigma_{red}} = \int_{R_w}^{R_z} \sigma_{red}^2 (r, \tau_k) dr = \min \tag{36}$$

lub po wykonaniu całkowania

$$I_{\sigma_{red}} = \sum_{i=1}^{N+2} \gamma_i \sigma_{red}^2 (r_i, \tau_k) \tag{37}$$

gdzie współczynniki γ_i są wynikiem zastosowanej metody całkowania (na przykład łuków parabolicznych). Wstawiając teraz wyrażenie na $\sigma_{red,i}^2$ do funkcjonału $I_{\sigma_{red}}$ otrzymujemy funkcjonał kwadratowy ze względu na wektor temperatury $\{T\}$, mianowicie

$$I_{\sigma_{red}} = \sum_{i=1}^{N+2} \frac{\gamma_i}{2} \{T\}^T \{SRED^i\} \{T\} = \{T\} [SK] \{T\} \tag{38}$$

Zauważyliśmy, że konsekwencją przyjęcia stałej temperatury końcowej T_∞ było znikanie naprężeń $\sigma_{red}(T_\infty)$, co doprowadziło do funkcjonału kwadratowego $I_{\sigma_{red}}$. Funkcjonał temperatury I_T zawierać będzie formę liniową ze względu na nie znikanie członu T_∞ .

Największe naprężenia termiczne występują na obwodzie $r = R_w$ i wtedy $\sigma_\varphi = \sigma_z, \sigma_r = 0$, wówczas

$$2\sigma_{red}^2 = \sigma_\varphi^2 + \sigma_z^2 = 2\sigma_\varphi^2 \quad \sigma_{red} = |\sigma_\varphi|$$

więc w punktach siatki otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma_{red,i} &= |\sigma_{\varphi,i}| = \text{sign}(\sigma_{\varphi,i}) \cdot \sigma_{\varphi,i} = \text{sign}(\sigma_{\varphi,i}) \cdot \sum_j \text{SIGT}_{ij} \cdot T_j = \\ &= \text{sign}(\sigma_{\varphi,i}) \{SRT^i\}^T \{T\} \end{aligned}$$

lub

$$\sigma_{red,i}^2 = \{T\}^T \{SRT^i\} \{SRT^i\}^T \{T\}$$

Zagadnienie poszukiwania przebiegu temperatury powierzchni wewnętrznej płaszcza cysterny możemy sformułować następująco:

Niech $T(r, \tau)$ będzie rozwiązaniem równania przewodnictwa ciepła (1) z warunkami (2) – (3). Poszukiwać będziemy rozkładu temperatury $T(r = R_w, \tau)$, dla którego po czasie $\tau = \tau_k$ całka

$$I_{\sigma_{red}} = \int_{R_w}^{R_z} \sigma_{red}^2(r, \tau_k) dr \quad (40)$$

osiągnie minimum przy zachowaniu warunku

$$\sigma_{red}^2 \leq \sigma_{dop}^2, \quad 0 < \tau \leq \tau_k, \quad T(R_w, \tau_k) = T_r \quad (41)$$

gdzie T_r oznacza temperaturę roboczą czynnika. Ze względu na niezerową wielkość temperatury T_k optymalne rozwiązanie przy starcie od temperatury początkowej $T_0 \neq T_k$ nie będzie funkcją stałą. Warunek nierównościowy (50) można ująć przez zastosowanie metody mnożników Lagrange'a albo funkcji kary.

4. WYZNACZENIE OPTIMALNEGO PROCESU NAGRZEWANIA (CHŁODZENIA) NA PODSTAWIE MINIMALIZACJI FUNKCJONAŁU NAPRĘŻEŃ (49)

W punkcie tym przedstawimy numeryczną realizację minimalizacji funkcjonału $I_{\sigma_{red}}$ bez warunku dodatkowego $\sigma_{\varphi}(x_0, \tau) \leq \sigma_{dop}$. Z fizycznego punktu widzenia warunek ten będzie ingerować, w przypadku gdy czas nagrzewania (chłodzenia) będzie krótszy od czasu τ_{opt} zależnego od średnic rury i materiału, z którego jest ona wykonana. W przypadku $\tau_k < \tau_{opt}$ należy się spodziewać, że w przedziale $(0, \tau_k)$, temperatura nagrzewania (chłodzenia) może przekraczać temperaturę w chwili końcowej τ_k .

Wyznamy postać funkcjonału $I_{\sigma_{red}}$ w funkcji kolejnych temperatur powierzchni wewnętrznej $\{\Theta_0^1, \dots, \Theta_0^{n-1}\}$ przy zadanej temperaturze w chwili początkowej Θ_0^0 i końcowej Θ_0^n . Temperaturę w punktach siatki $x(2), \dots, x(N+2)$ i kolejnych chwilach czasu n wyraża zależność (21):

$$\{v^n\} = [AB]^n \{v^0\} + \sum_{i=1}^{n+1} \{CN^{n+2-i}\} \cdot \Theta_0^{i-1} = [AB]^n \{v^0\} + \sum_{i=0}^n \{CN^{n+1-i}\} \cdot \Theta_0^i$$

a funkcjonał naprężeń zredukowanych

$$I_{red}^n = \{T^n\}^T [SK] \{T^n\} \quad \{T^n\}^T = \{\Theta_0^n, v_1^n, v_2^n, \dots, v_{N+1}^n\} \quad (42)$$

Zauważmy, że dla stałego wektora temperatury $\{T^n\} \neq \{0\}$ naprężenia znikają, co powoduje zerowanie się funkcjonału I_{red}^n , to znaczy

$$\{T^n\}^T [SK] \{T^n\} = 0 \quad (43)$$

Zatem macierz [SK] jest macierzą półdefinitnie określoną. Do dalszej analizy przyjmujemy, że temperatura początkowa Θ_0^0 i temperatura końcowa Θ_0^n (w punkcie x_0) są wartościami znanymi. Wydzielmy zatem te dwie wielkości z wyrażenia (21)

$$\begin{aligned} v_j^n &= FN_j^n + CN_j^{n+1} \cdot \Theta_0^n \cdot CN_j^1 \cdot \Theta_0^n + \sum_{i=1}^{n-1} CN_j^{n+1-i} \cdot \Theta_0^i = \\ &= FN_j^n + W_j + \sum_{i=1}^{n-1} CN_j^{n+1-i} \cdot \Theta_0^i \end{aligned}$$

Wtedy

$$I_{\sigma_{red}}^n = \{\Theta_0^n, v_1^n, \dots, v_{n+1}^n\}^T [SK] \begin{Bmatrix} \Theta_0^n \\ v_1^n \\ \vdots \\ v_{N+1}^n \end{Bmatrix} =$$

$$= \{\Theta_0^n, v_1^n, \dots, v_{n+1}^n\}^T \left\{ \begin{array}{l} SK_{11} \cdot \Theta_0^n + \sum_{j=2}^{N+2} SK_{1j} \cdot v_{j-1}^n \\ \dots\dots\dots \\ SK_{11} \cdot \Theta_0^n + \sum_{j=2}^{N+2} SK_{1j} \cdot v_{j-1}^n \\ \dots\dots\dots \\ SK_{N+2,1} \cdot \Theta_0^n + \sum_{j=2}^{N+2} SK_{N+2,1} \cdot v_{j-1}^n \end{array} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \Theta_0^n \cdot \left(\text{SK}_{11} \cdot \Theta_0^n + \sum_{j=2}^{N+2} \text{SK}_{1j} \cdot v_{j-1}^n \right) + \sum_{i=2}^{N+2} v_{i-1} \left(\text{SK}_{i1} \cdot \Theta_0^n + \sum_{j=2}^{N+2} \text{SK}_{ij} \cdot v_{j-1}^n \right) = \\
&= (\Theta_0^n)^2 \cdot \text{SK}_{11} + \Theta_0^n \cdot \left(\sum_{j=2}^{N+2} \text{SK}_{1j} v_{j-1}^n + \sum_{j=2}^{N+2} \text{SK}_{j1} v_{j-1}^n \right) + \sum_{i=2}^{N+2} \sum_{j=2}^{N+2} \text{SK}_{ij} v_{j-1}^n v_{i-1}^n
\end{aligned}$$

Ze względu na symetryczność macierzy [SK], $\text{SK}_{ij} = \text{SK}_{ji}$ otrzymujemy

$$I_{\sigma_{\text{red}}} = (\Theta_0^n)^2 \text{SK}_{11} + 2\Theta_0^n \cdot \sum_{j=1}^{N+1} \text{SK}_{1,j+1} v_j^n + \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \text{SK}_{i+1,j+1} \cdot v_i^n v_j^n \quad (44)$$

a stąd na podstawie (21)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_{\sigma_{\text{red}}}^n}{\partial \Theta_0^m} &= 2\Theta_0^n \sum_{j=1}^{N+1} \text{SK}_{1,j+1} \cdot \text{CN}_j^{n+1-m} + \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} S_{i+1,j+1} \cdot \\
&\cdot \left[(\text{FN}_j^n + W_j) \text{CN}_i^{n+1-m} + (\text{FN}_i^n + W_i) \text{CN}_j^{n+1-m} \right] + \\
&+ \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{q=1}^{N+1} S_{i+1,j+1} \cdot \text{CN}_j^{n+1-m} \cdot \text{CN}_i^{n+1-q} \cdot \Theta_0^q + \\
&+ \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{q=1}^{N+1} S_{i+1,j+1} \cdot \text{CN}_i^{n+1-m} \cdot \text{CN}_j^{n+1-q} \cdot \Theta_0^q = 0
\end{aligned}$$

i ostatecznie

$$[\text{DS}] \left\{ \tilde{\Theta}_0 \right\} = \{\text{FR}\} \quad \left\{ \tilde{\Theta}_0 \right\}^T = \left\{ \Theta_0^1, \Theta_0^2, \dots, \Theta_0^{n-1} \right\}^T \quad (45)$$

Macierz [DS] jest macierzą symetryczną.

5. WYZNACZENIE OPTIMALNEGO PROCESU NAGRZEWANIA (CHŁODZENIA) NA PODSTAWIE MINIMALIZACJI FUNKCJONAŁU TEMPERATURY (39)

Podobnie jak w punkcie poprzednim przedstawimy numeryczną realizację minimalizacji funkcjonału I_T . Wyznamy więc postać funkcjonału I_T w fun-

kcji kolejnych temperatur powierzchni wewnętrznej $\{\Theta_0^1, \dots, \Theta_0^{n-1}\}$ przy zadanej temperaturze w chwili początkowej Θ_0^0 i końcowej Θ_0^n . Wyznamy postać jawną funkcjonału temperatury (30).

W stanie ustalonym ze względu na warunek $\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_z} = 0$ temperaturę $T_\infty(r) = T_w$ i funkcjonał I_T jest wygodniej przekształcić do postaci:

$$I_T^* = \int_{R_w}^{R_z} \left[\frac{T(r, \tau_k)}{T_w} - 1 \right]^2 dr \quad (46)$$

lub po wykonaniu całkowania

$$I_T^* = \gamma_1 \left[(\Theta_0^n)^2 - 2\Theta_0^n + 1 \right] + \sum_{j=1}^{N+1} \gamma_{j+1} \left[(v_0^n)^2 - 2v_0^n + 1 \right] \quad (47)$$

Zatem

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial I_T^*}{\partial \Theta_0^m} = \sum_{j=1}^{N+1} \gamma_{j+1} \cdot \left[v_j^n \frac{\partial v_j^n}{\partial \Theta_0^m} - \frac{\partial v_j^n}{\partial \Theta_0^m} \right] = 0$$

$$\frac{\partial v_j^n}{\partial \Theta_0^m} = CN_j^{n+1-m} \quad m = 1, 2, \dots, n-1$$

Stąd m -ty wiersz macierzy ma postać

$$\sum_{j=1}^{N+1} \gamma_{j+1} CN_j^{n+1-m} \cdot v_j^n = \sum_{j=1}^{N+1} \gamma_{j+1} CN_j^{n+1-m}$$

lub po podstawieniu wyrażenia na v_j^n

$$\sum_{j=1}^{N+1} \gamma_{j+1} CN_j^{n+1-m} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_{j+1} CN_j^{n+1-m} \cdot \Theta_0^i = \sum_{j=1}^{N+1} \gamma_{j+1} CN_j^{n+1-m} -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^{N+1} \gamma_{j+1} \text{CN}_j^{n+1-m} \cdot (\text{FN}_j^n + \text{CN}_j^1 \cdot \Theta_0^n \text{CN}_j^{n+1} \cdot \Theta_0^0) \\
& \sum_{p=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{N+1} \gamma_{j+1} \text{CN}_j^{n+1-m} \cdot \text{CN}_j^{n+1-p} \right) \Theta_0^p = \\
& = \sum_{j=1}^{N+1} \gamma_{j+1} \text{CN}_j^{n+1-m} (1 - \text{FN}_j^n - \text{CN}_j^1 \cdot \Theta_0^n - \text{CN}_j^{n+1} \cdot \Theta_0^0) \\
& \Theta_0^n = 1 \quad m = 1, \dots, n-1
\end{aligned} \tag{48}$$

i ostatecznie

$$[\text{DT}] \{ \tilde{\Theta}_0 \} = \{ \text{FR} \} \quad \{ \tilde{\Theta}_0 \} = \{ \Theta_0^1, \Theta_0^2, \dots, \Theta_0^{n-1} \} \tag{49}$$

Macierz [DT] jest macierzą symetryczną.

Niech τ_{opt} oznacza czas nagrzewania (chłodzenia), w czasie którego przejściu od temperatury początkowej τ_0 do temperatury końcowej $\tau_k = \tau_{\text{opt}}$ nie nastąpi przekroczenie naprężeń dopuszczalnych. Zatem dla czasów $\tau_k < \tau_{\text{opt}}$ nastąpi przekroczenie dopuszczalnych naprężeń. Jest to wynikiem minimalizacji funkcjonałów: $I_{\sigma_{\text{red}}}$ i I_T , gdyż proces minimalizacji prowadzi do równomiernego rozkładu temperatur w chwili $\tau = \tau_k$. W trakcie minimalizacji nie nakładaliśmy żadnych ograniczeń na wartości naprężeń zredukowanych na powierzchni wewnętrznej ($x_0 = R_w$, $\sigma_{\text{red}} = |\sigma_\varphi|$).

Zatem dla $\tau_k \leq \tau_{\text{opt}}$ należy do funkcjonałów $I_{\sigma_{\text{red}}}$, I_T dołączyć warunek

$$|\sigma_\varphi(x_0, \tau)| \leq \sigma_{\text{dop}} \tag{50}$$

Wyznamy zatem postać jawną tego warunku. Na podstawie (33) otrzymujemy

$$\sigma_\varphi(x_0, \tau^i) = \sigma_{\varphi, 1}^i = \sum_{j=1}^{N+2} \text{SIGT}_{1,j} \cdot T_j^i = \text{SIGT}_{1,1} \cdot \Theta_0^i + \sum_{j=1}^{N+1} \text{SIGT}_{1,j+1} \cdot v_j^i$$

Uwzględniając zależność (21) dostajemy

$$\sigma_{\varphi, 1}^i = \text{SIGT}_{11} \cdot \Theta_0^i + \sum_{j=1}^{N+1} \text{SIGT}_{1,j+1} (\text{ZK}_j^i + \text{ZKE}_j^i \cdot \Theta_0^0 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{p=1}^{n-1} ZEF_{pj}^i \cdot \Theta_0^p - F_j \cdot \Theta_0^i = \sum_{p=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{N+1} SIGT_{1,j+1} \cdot ZEF_{pj}^i \right) \cdot \Theta_0^p + \\
 & + SIGT_{11} - \sum_{j=1}^{N+1} F_j^i \cdot \Theta_0^i + \sum_{j=1}^{N+1} SIGT_{1,j+1} (ZK_j^i + ZKE_j^i \cdot \Theta_0^0) \leq \sigma_{dop} \\
 & i = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{51}$$

stąd otrzymujemy układ nierówności

$$[A] \{\tilde{\Theta}\} + \{C\} \leq \{0\} \tag{52}$$

gdzie macierz A jest macierzą prostokątną o wymiarze $n \times (n-1)$.

6. OBLICZENIA NUMERYCZNE

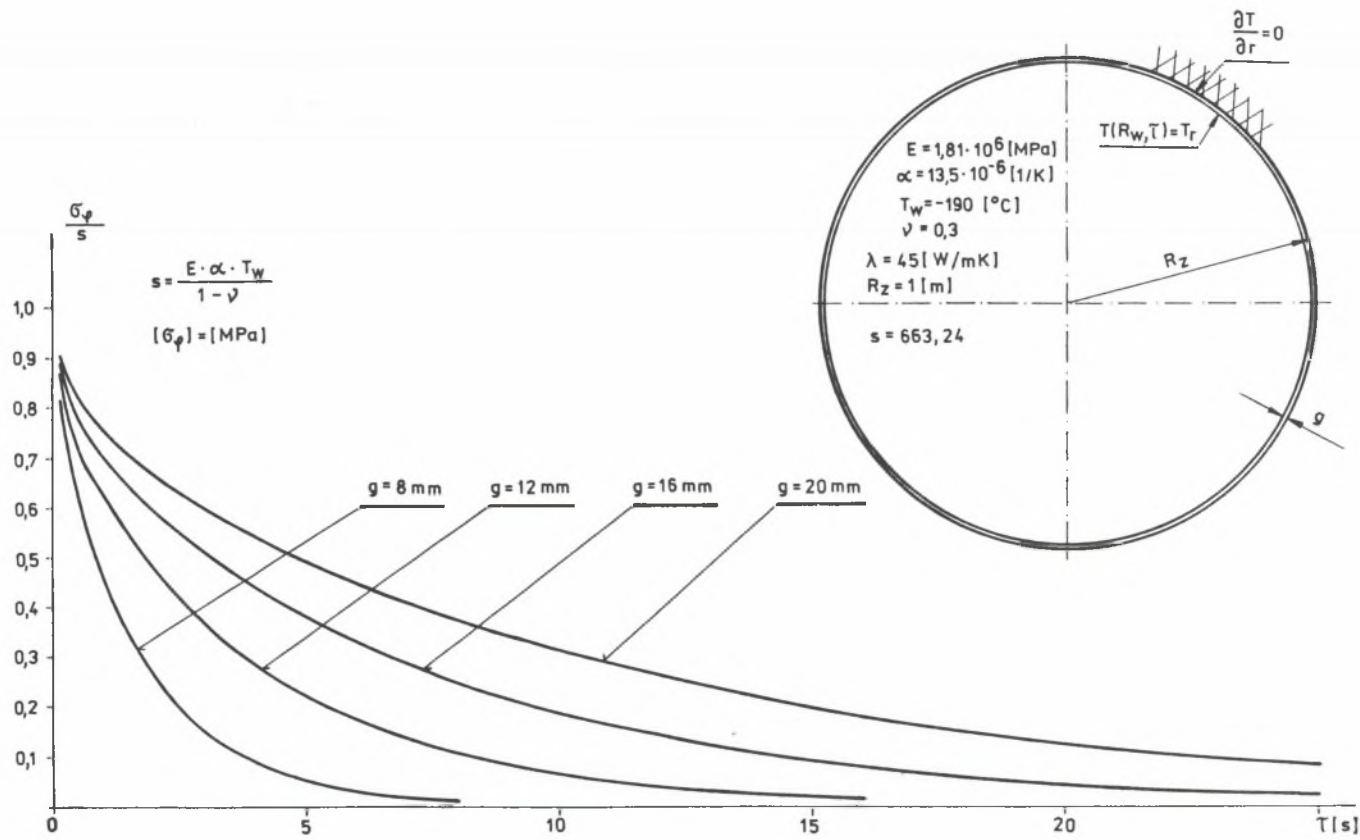
Z praktycznego punktu widzenia jest rzeczą naturalną wyznaczenie ekstremalnego procesu nagrzewania (wymrażania) konstrukcji poddawanej obciążeniom cieplnym.

Ekstremalne nagrzewanie (wymrażanie) jest opisane warunkiem brzegowym I rodzaju (w wielkościach bezwymiarowych – temperatura na brzegu równa 1, a początkowa równa 0). Ze względu na eksploatację zbiorników do przewozu skroplonych gazów powierzchnia zewnętrzna jest izolowana termicznie, co modelujemy warunkiem brzegowym II rodzaju.

Dla tych wariantów przeprowadzono obliczenia naprężeń termicznych, których przebieg przedstawiono na rysunku 1 dla różnych grubości płaszcza cysterny i dla kolejnych chwil czasu. Dla chwil początkowych naprężenia termiczne dla danych materiałowych są rzędu 500 MPa, co dla niektórych stali jest wartością większą niż naprężenia dopuszczalne (rys. 1).

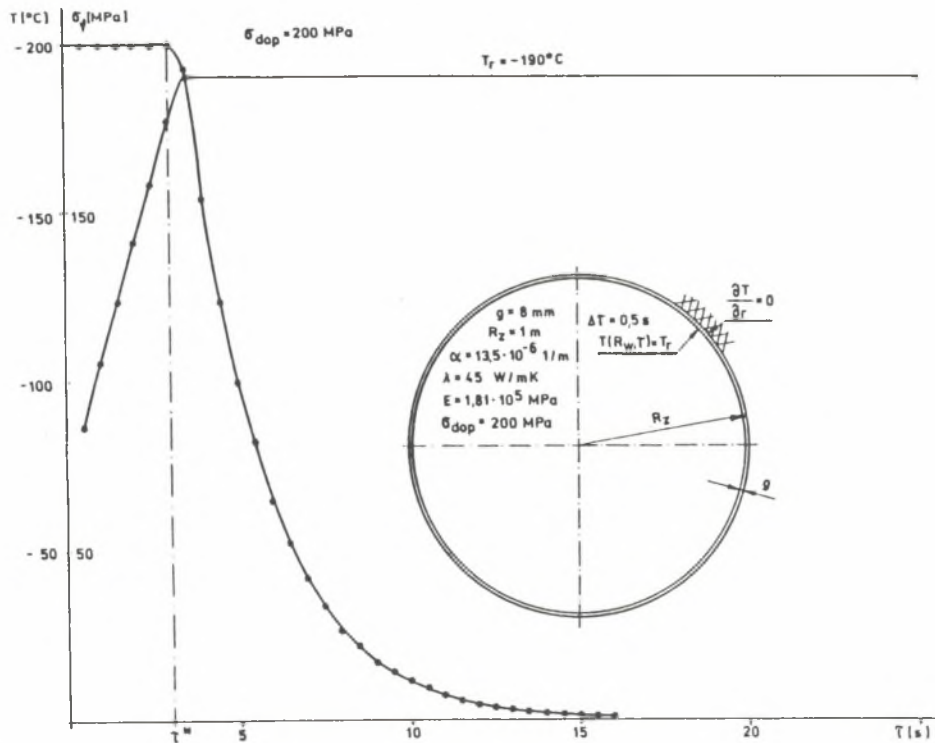
Na rysunkach 2 + 5 przedstawiono proces wymrażania płaszcza cysterny od temperatury początkowej $T^0(x) = 0$ do temperatury roboczej $T_r = -190^\circ\text{C}$. Założony czas wymrażania $\tau_k = 50$ s. Pozostałe wielkości zaznaczono na rysunkach. Obliczenia przeprowadzono dla czterech wariantów grubości płaszcza $g = 8, 12, 16, 20$ mm, a odpowiadające im przebiegi optymalnych krzywych wymrażania zapewniających nieprzekroczenie dopuszczalnych naprężeń pokazano na kolejnych rysunkach.

Dla procesu optymalnego wymrażania interesujące jest wyznaczenie krzywej rozdzielającej obszar, w którym naprężenia termiczne osiągają wartości naprężeń dopuszczalnych, od obszaru w którym naprężenia termiczne maleją ze względu na wyrównywanie się temperatur w płaszczu cysterny.



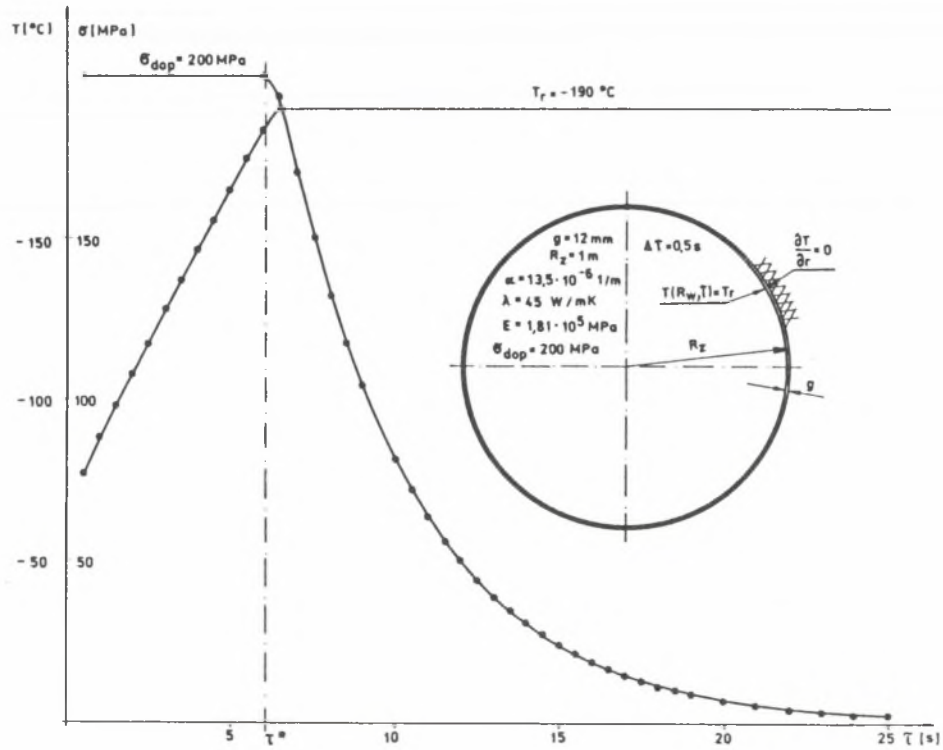
Rys. 1. Rozkład naprężeń obwodowych na powierzchni wewnętrznej $x_0 = R_w$ dla różnych grubości płaszcza zbiornika przy szokowym działaniu temperatury na tej powierzchni

Fig. 1. Circumferential stresses distribution on a interior surface $x_0 = R_w$, for various tank shell thicknesses at shock temperature impact upon that surface



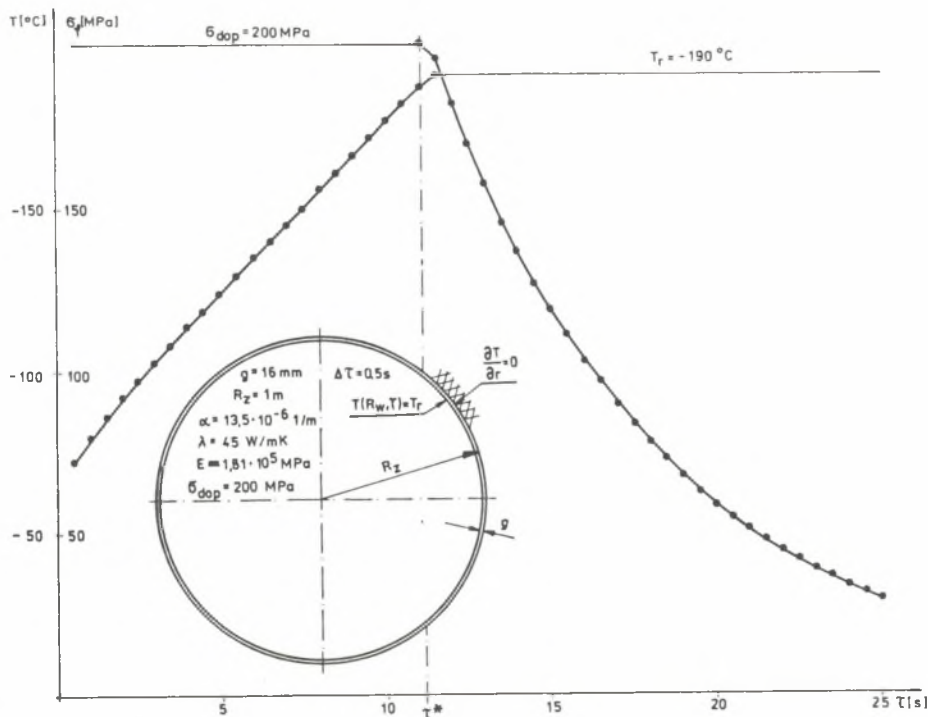
Rys. 2. Wykres optymalnego procesu wymrażania płaszczu zbiornika dla temperatury roboczej $T_r = -190^\circ\text{C}$ i grubości płaszczu $g = 8 \text{ mm}$

Fig. 2. A diagram of a tank shell optimum low-temperature treatment process, at the working temperature $T_r = -190^\circ\text{C}$ and shell thickness $g = 8 \text{ mm}$



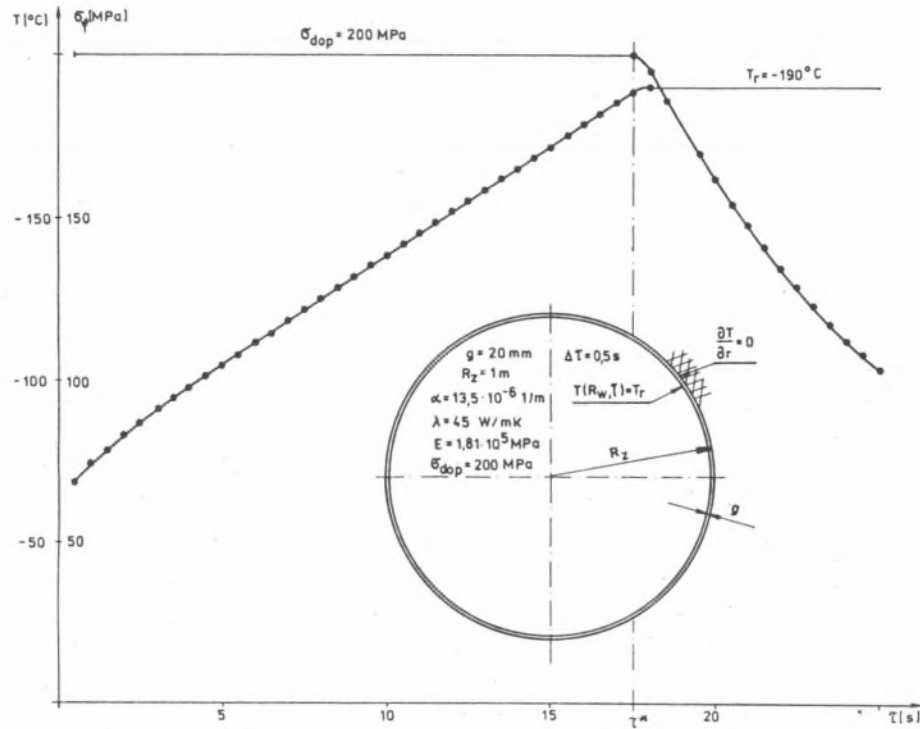
Rys. 3. Wykres optymalnego procesu wymrażania płaszczu zbiornika dla temperatury roboczej $T_r = -190^\circ\text{C}$ i grubości płaszczu $g = 12 \text{ mm}$

Fig. 3. A diagram of a tank shell optimum low-temperature treatment process, at the working temperature $T_r = -190^\circ\text{C}$ and shell thickness $g = 12 \text{ mm}$



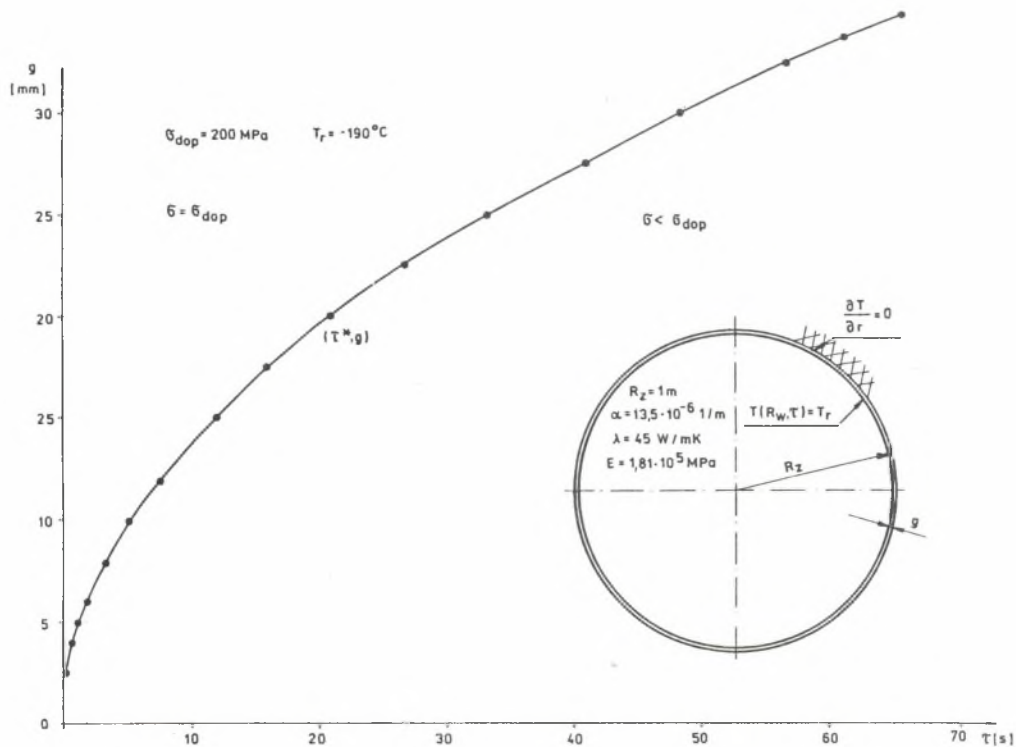
Rys. 4. Wykres optymalnego procesu wymrażania płaszczka zbiornika dla temperatury roboczej $T_r = -190^\circ\text{C}$ i grubości płaszczka $g = 16 \text{ mm}$

Fig. 4. A diagram of a tank shell optimum low-temperature treatment process, at the working temperature $T_r = -190^\circ\text{C}$ and shell thickness $g = 16 \text{ mm}$



Rys. 5. Wykres optymalnego procesu wymrażania płaszczka zbiornika dla temperatury roboczej $T_r = -190^\circ\text{C}$ i grubości płaszczka $g = 20 \text{ mm}$

Fig. 5. A diagram of a tank shell optimum low-temperature treatment process, at the working temperature $T_r = -190^\circ\text{C}$ and shell thickness $g = 20 \text{ mm}$



Rys. 6. Krzywa rozdziału naprężeń na obszar, w którym $\sigma_{\varphi}(R_w, \tau) = \sigma_{dop}$, $\tau \leq \tau^*$ oraz obszar o malejących naprężeniach $\sigma_{\varphi}(R_w, \tau_1) < \sigma_{\varphi}(R_w, \tau_2) < \sigma_{dop}$, $\tau_1 > \tau_2 > \tau^*$

Fig. 6. A stress division curve into domains in which a) $\sigma_{\varphi}(R_w, \tau) = \sigma_{dop}$, $\tau \leq \tau^*$ b) $\sigma_{\varphi}(R_w, \tau_1) < \sigma_{\varphi}(R_w, \tau_2) < \sigma_{dop}$, $\tau_1 > \tau_2 > \tau^*$

Punkt rozdziału tych dwóch obszarów wyznacza para (τ^*, g) , gdzie τ^* jest czasem, po upływie którego przyłożenie temperatury $T = T_r$ na powierzchni $R = R_w$ nie spowoduje przekroczenia naprężeń termicznych dla płaszcza o grubości g . Odpowiednie punkty (τ^*, g) z rys. 6 odpowiadają punktowi spadku naprężeń na rysunkach 4 ÷ 6. Dla wzrastającej grubości „ g ” płaszcza cysterny czas τ^* wzrasta wykładniczo.

Autor dziękuje Zakładom METALCHEM – Kościan za zainicjowanie tego tematu.

Pracę wykonano w ramach badań własnych BW-066-56/94.

LITERATURA

- [1] Boley B.A., Weiner J.H.: Theory of thermal stresses. J. Wiley, New York 1960.
- [2] Chmielniak T., Kosman G.: Obciążenia cieplne turbin parowych WNT, Warszawa 1990.
- [3] Chmielniak T., Kosman G., Rusin A.: Pełzanie elementów turbin ciepłych, WNT, Warszawa 1990.
- [4] Lipka J.: Wytrzymałość maszyn wirnikowych. PWN, Warszawa 1967.
- [5] Luenberger D.G.: Teoria optymalizacji. Biblioteka Naukowa Inżyniera, PWN, Warszawa 1974.
- [6] Nowacki W.: Teoria sprężystości. PWN, Warszawa 1970.
- [7] Melan E., Farkus H.: Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. Springer-Verlag, Wien 1959.
- [8] Orłoś Z. (red.): Naprężenia cieplne. PWN, Warszawa 1991.
- [9] Parkus H.: Instationäre Wärmespannungen. Springer-Verlag, Wien 1959.

Recenzent: Dr hab. inż. Kazimierz Kurpisz

Wpłynęło do Redakcji: 21. 06. 1994 r.

Abstract

In engineering, we often deal with structural components under high thermal load. Constructions working in high and low temperatures are among them. This paper refers to one of them.

It considers the problem of influence and control of the first boundary condition upon receiving a desired thermal stresses distribution within a particular time interval. It has the required stresses – allowable, because of the constructions working reliability – cannot be exceeded.

This problem has been solved within the limits of linear equation of the heat conduction and elasticity theory. Considering the construction shape, a one-dimensional linear equation of heat conduction with an unknown cylinder boundary condition of the first kind upon the cylinder interior surface was implemented for calculations. Temperature distribution on the inner surface of the cylinder was determined from the condition assuming that the demanded thermal stresses were not exceeded. Such a formulation of the problem has led to the issue of quadratic programming.

Theoretical considerations have been illustrated with numerical examples.