ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1992

Seria: MECHANIKA z. 107 Nr kol. 1154

Ryszard Maroński
Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej
Politechnika Warszawska

O "TEORII BIEGÓW LEKKOATLETYCZNYCH"

Streszczenie. Celem niniejszego opracowania jest przedstawienie prostej metody rozwiązania zagadnienia minimalizacji czasu przebycia przez biegacza zadanego dystansu. Proponowany sposób wykorzystuje zmodyfikowaną metodę ekstremalizacji całek liniowych za pomocą twierdzenia Greena (metodę Mielego). Dla podanego przez Kellera modelu ruchu zawodnika wykres prędkości optymalnej można podzielić na trzy odcinki: rozpędzanie, bieg ze stałą prędkością i finisz ze zmniejszającą się prędkością.

Резюме. В статье предложен простой метод решения задачи минимизации времени пробытия бегуном заданного росстояния. Предлагаемый способ использует модифицированный метод экстремизации линейных интегралов при помощи теоремы Грина (метод Меле). Для разработанной Келлером модели движения спортсмена оптимальную диаграмму скорости можно разделить на три отрезка: разгонка, бег с постоянной скоростью и финиш с уменьшаемой скоростью.

Summary. This paper deals with the minimum time problem during the run over the given distance. The simple method is proposed. It uses the modified method of linear integrals extremization by Green's theorem (Miele's method). For Keller's model of the runner's motion, the optimal velocity diagram proves that the race can be broken into three phases: acceleration, cruise with the constant velocity and negative kick at the end of the race.

1. WSTĘP

W czasie rozgrywania konkurencji biegacz może w różny sposób gospodarować swoim zapasem sił. Przez optymalną strategię rozgrywania konkurencji biegowej będziemy uważać taki sposób rozłożenia wysiłku, aby przy zadanych parametrach opisujących stan organizmu biegacza, czas przebycia zadanego dystansu był minimalny. Jest to typowe zadanie teorii sterowania optymalnego. Przed przystąpieniem do jego rozwiązania trzeba zaproponować model ruchu biegacza - model uwzględniający fizjologię wysiłku. Sprawa wyboru takiego modelu jest dość złożona, a to z kilku względów. W czasie wysiłku zachodzi kilkadziesiąt procesów biochemicznych znanych najczęściej w sposób jakościowy [1]. Model ruchu zawodnika natomiast musi być modelem ilościowym. Co więcej, model ten powinien dość dobrze opisywać badany proces w szerokim zakresie zmian wysiłku, gdyż rozwiązanie optymalne nie jest na razie znane. Przeprowadzenie obliczeń wymaga znajomości wartości liczbowych parametrów modelu. Ich identyfikacja jest na ogół procesem długotrwałym. Z powyższych względów zdecydowano się wykorzystać model ruchu biegacza podany przez Kellera [2], [5]. W niniejszej pracy do rozwiązania problemu zastosowano zmodyfikowaną metodę ekstremalizacji całek liniowych za pomocą twierdzenia Greena (metodę Mielego). Metoda ta jest prosta pojęciowo i obliczeniowo, daje warunki konieczne i wystarczające optymalności z uwzględnieniem łuków osobliwych.

2. MODEL RUCHU BIEGACZA

Model ruchu biegacza jest następujący (porównaj [2], [5]): Zawodnika traktujemy jak punkt materialny, pokrywający się z jego środkiem masy, poruszający się po prostoliniowym torze nachylonym pod kątem α do poziomu. Zaniedbujemy w ten sposób pionowe przemieszczenia środka masy wynikające z cyklicznego charakteru kroków i przemieszczenia na starcie do biegu. Siły działające na zawodnika pokazano na rys. 1, gdzie: F jest całkowitą siłą napędzającą (zmienną w czasie biegu), R jest całkowitym oporem ruchu, N jest reakcją normalną do podłoża, mg jest siłą ciężkości. W modelu Kellera zmienne odniesiono do jednostki masy m zawodnika. Przyjęto, że

$$F = m\, f\,, \qquad R = m\, v/\tau\,, \tag{1}$$

gdzie: f jest nową zmienną sterującą, v jest prędkością ruchu biegacza, τ jest stałym współczynnikiem. Wykorzystując drugą zasadę Newtona otrzymujemy

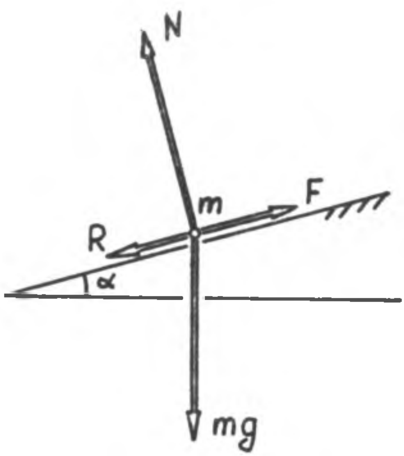
$$\frac{dv}{dt} = (f - a) - \frac{v}{\tau}\,, \tag{2}$$

gdzie $a = g \sin\alpha$, t zaś jest czasem.

Zakładamy, że przemiany energetyczne zachodzące w organizmie biegacza reprezentuje równanie bilansu mocy

$$\frac{dE}{dt} = \sigma - f\,v\,, \tag{3}$$

gdzie E jest dostępną energią przypadającą na jednostkę masy zawodnika, σ jest stałą prędkością produkcji energii na jednostkę masy, fv zaś



Rys. 1. Siły działające na zawodnika w czasie biegu
Fig. 1. The forces exerted on the runner during the race

prędkością konsumpcji energii na jednostkę masy. Na starcie do biegu zawodnik dysponuje pewnym zapasem energii E_A. Keller wiąże ten zapas z obecnością tlenu rozpuszczonego we krwi biegacza, σ zaś odpowiada produkcji energii uwalnianej przez tlen dostarczany do organizmu w trakcie oddychania. Konsumpcja tlenu zależy od chwilowej mocy rozwijanej przez biegacza fv. Jest więc widoczne, że model ten uwzględnia jedynie mechanizmy aerobowe, mechanizmy anaerobowe, istotne w czasie pierwszych kilkunastu sekund biegu, nie są uwzględniane.

Układ równań różniczkowych (2) i (3) powinien spełniać zadane warunki początkowe

$$v(t_A) = v_A , \qquad E(t_A) = E_A . \tag{4}$$

Na całym dystansie muszą być spełnione ograniczenia nierównościowe narzucone na siłę napędzającą i energię

$$0 \le f(t) \le f_{max} , \qquad E(t) \ge 0 . \tag{5}$$

Minimalizowany jest czas T przebycia zadanego dystansu

$$T = \int_A^B dt . \tag{6}$$

Dystans ten jest określony całką

$$D = \int_A^B v\, dt . \tag{7}$$

Indeksy A i B dotyczą odpowiednio punktu początkowego i końcowego.

3. METODA ROZWIĄZANIA

Sformułowany problem został rozwiązany przez Kellera klasyczną metodą rachunku wariacyjnego, w której warunki konieczne ekstremum otrzymuje się przez przyrównanie do zera wariacji funkcjonału [3]. Zastosowana w niniejszej pracy metoda Mielego stosuje się do zagadnień sterowania optymalnego z ograniczeniami nierównościowymi, w których to zagadnieniach wskaźnik jakości można przedstawić jako całkę liniową zależną od dwóch zmiennych. Metoda ta polega na porównaniu wskaźników jakości dla dwóch arbitralnie wybranych realizacji sterowań, dzięki czemu możliwe jest określenie kierunku poprawy sterowania, a w konsekwencji, wyznaczenie sterowania optymalnego. W swojej oryginalnej postaci metoda ta dotyczy zagadnień z ustalonym stanem końcowym. Ze względu na to, że w rozważanym zadaniu prędkość v_B nie jest dana, modyfikacja metody polega na uwzględnieniu takiego przypadku.

Minimalizowany wskaźnik jakości (6) można przedstawić w postaci całki liniowej dwóch zmiennych E i v

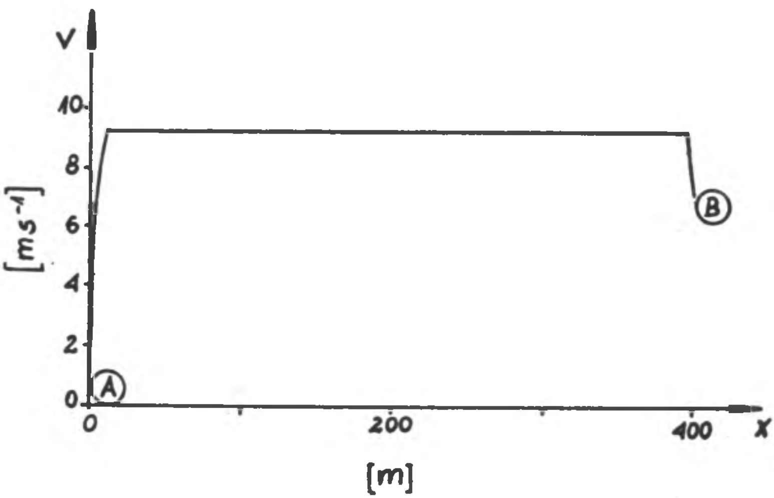
$$T = \int_A^B \left(\sigma - av - v^2/\tau\right)^{-1} dE \;+\; \left(\sigma - av - v^2/\tau\right)^{-1} v\, dv\,, \tag{8}$$

ograniczenie izoperymetryczne (7) zaś w postaci

$$D = \int_A^B \left(\sigma - av - v^2/\tau\right)^{-1} v\, dE \;+\; \left(\sigma - av - v^2/\tau\right)^{-1} v^2\, dv\,. \tag{9}$$

Można pokazać, że rozwiązanie optymalne składa się z trzech odcinków: rozpędzania, gdzie zawodnik rozwija maksymalną siłę napędzającą, $f=f_{max}$; odcinka na którym prędkość biegacza jest stała, rozwijana zaś siła napędzająca jest mniejsza od maksymalnej, $f<f_{max}$; finiszu, gdzie prędkość biegacza maleje (wynika ona z warunków: $E(t)=0$, $dE=0$).

Dla następujących danych (porównaj [2]): $v_A = 0\ ms^{-1}$, $E_A = 2409.25\ m^2s^{-2}$, $f_{max} = 12.2\ m\ s^{-2}$, $\tau = 0.892\ s$, $\sigma = 41.61\ m^2s^{-2}$, dystansu $D = 400\ m$ i toru nachylonego pod kątem $\alpha = 2^\circ$ do poziomu, optymalny wykres prędkości biegacza w funkcji przebytego dystansu przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Optymalna prędkość biegacza na dystansie 400 m

Fig. 2. The optimal runner's velocity during the 400-meter run

LITERATURA

[1] Fox E.L., Mathews D.K.: The Physiological Basis of Physical Education and Athletics. Saunders College Publishing, Philadelphia 1981.

[2] Keller J.B.: A Theory of Competitive Running. Physics Today 26, 1973, pp. 42-47.

[3] Keller J.B.: Optimal Velocity in a Race. American Mathematical Monthly 81, 1974, pp. 474-480.

[4] Miele A.: Extremization of Linear Integrals by Green's Theorem. In Leitmann G.: Optimization Techniques with Applications to Aerospace Systems. Academic Press, New York 1962, pp. 69-98.

[5] Townsend M.S.: Mathematics in Sport. Horwood, Chichester 1984, pp.23-28.

ON "THE THEORY OF COMPETITIVE RUNNING"

In this paper the Keller's model of competitive running [2] is reconsidered. This model is based upon Newton's second law (2) and an equation of power balance describing the oxygen supply (3). The time of covering the given distance is minimized. Initial conditions imposed on the runner's velocity and energy (4) are given. This is a typical problem of optimal control. This problem has been solved applying classical method of calculus of variations which consists in equating to zero variations of the functional [3]. In this paper, however, Miele's method has been applied because the performance index (6) and the isoperimetric constraint (7) may be performed as a linear integrals of two independent variables (compare (8) and (9)). This method is superior to the previous one because it has a simple geometrical interpretation and it gives sufficient and necessary conditions of optimality. The optimal run can be broken into three phases for the middle- and long-distance events: acceleration, cruise with constant velocity and negative kick at the end. Only the first phase occurs for short-distance dashes. The second one predominates for long-distance races.