ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1992

Seria: MECHANIKA z. 107 Nr kol. 1154

Maciej Minch, Dariusz Styś
Instytut Budownictwa
Politechnika Wrocławska

NIELINIOWE MODELOWANIE ŻELBETOWYCH TARCZ ZARYSOWANYCH METODĄ ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

Streszczenie. W pracy sformułowano nieliniowy model żelbetowych tarcz zarysowanych. Zarysowanie opisano wykorzystując elementy matematycznej teorii defektów. Przedstawiono zastosowanie metody elementów brzegowych do nieliniowej analizy żelbetowych tarcz zarysowanych. Zamieszczono przykład liczbowy.

Резюме. В работе сформулирована нелинейная модель железобетонных очертанных щитов. Очертание описано с использованием элементов математической теории дефектов. Представлено применение метода краевых элементов для нелинейного анализа железобетонных очертанных дисков. Дан числовой пример.

Summary. The paper presents the nonlinear model of RC cracked discs. The cracks were described by the elements of mathematical theory of defects. The application of boundary element method to nonlinear analysis of RC discs was shown. The results of numerical example were presented.

1. WPROWADZENIE

Dotychczasowe sposoby wymiarowania tarcz żelbetowych polegają w większości na określeniu zbrojenia z rozwiązań przyjętych na podstawie liniowej teorii sprężystości. Rzeczywisty zakres obciążeń użytkowych powoduje jednak, że większość ustrojów żelbetowych pracuje w fazie II, tzn. że zależności naprężenie-odkształcenie $\sigma-\varepsilon$ są nieliniowe, a konstrukcja staje się niejednorodna w wyniku powstania rys. Powodować to może istotne przegrupowanie sił wewnętrznych w ustroju zarysowanym w porównaniu do jego stanu bez rys. Tezę tę potwierdzają nieliczne dla płaskiego stanu naprężenia badania doświadczalne.

W pracy rozważono nieliniowy opis żelbetowej tarczy zarysowanej z wykorzystaniem elementów matematycznej teorii defektów, teorii żelbetu oraz teorii rys. Do rozwiązania zadania zastosowano metodę elementów brzegowych (BEM).

2. MATEMATYCZNE MODELOWANIE RYS

Przyjęto, że w obszarze tarczy Ω występuje ustalona rysa s. Wykorzystując założenia teorii defektów dla logarytmicznych potencjałów warstwy pojedynczej i podwójnej, zbudowanych na bazie rozwiązania fundamentalnego G dla płaskiego stanu naprężenia, uzyskano następujące własności na krzywej s:

$$[\underline{u}]_s = \underline{g}(s) \quad , \tag{1}$$

$$[\mathcal{L}\underline{u}]_s = 0 \quad , \tag{2}$$

gdzie $\underline{g}$ jest wektorem Burgersa linii dyslokacji oznaczającym gęstość defektu lub inaczej skok wektora przemieszczenia $\underline{u}$ w rysie (definiując $[f]_s = \lim^{+} f - \lim^{-} f$), zaś $\mathcal{L} = \underline{n}\,\underline{C}\,\hat{\nabla}$ jest operatorem różniczkowym zapewniającym ciągłość wektora napięć $\underline{N} = \int \sigma \, dh$ (h - grubość tarczy), przy przejściu przez s. Dodatkowo $\underline{C}$ oznacza tensor stałych materiałowych, zaś $\underline{n}$ spełnia rolę pochodnej normalnej do brzegu s.

Tak sformułowane założenia odpowiadają rzeczywistym własnościom rysy dla płaskiego stanu naprężenia w betonie zbrojonym, gdzie ciągłość napięć zapewniona jest przez występujące w rysie zbrojenie.

Spełnienie warunków (1) i (2) odbywa się przez wymuszenie na krzywej s pewnych kombinacji obciążeń zbudowanych z funkcji podstawowych. Można np. pokazać [1], że dla rysy z nieciągłym przemieszczeniem normalnym wymuszenie uzyskuje się z superpozycji obciążeń ciągłych na s w formie dipoli normalnych $\kappa(s)$ i sił stycznych $\rho(s)$:

$$\rho(s) = \frac{\lambda\mu}{2(\lambda + \mu)} \underline{g}_{,s}(s) \quad , \quad \kappa(s) = \mu\, \underline{g}(s) \quad , \tag{3}$$

gdzie λ i μ są stałymi Lame'a.

3. ROZWIĄZANIE TARCZY METODĄ ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

Ze względu na konieczność uwzględnienia w rozwiązaniu historii obciążenia, równania i definicje sformułowano w formie przyrostowej zależnej od czasu (oznaczenie symbolem $(\dot{\ })$). Nieliniowy związek fizyczny dla betonu i stali opisać można pewnymi znanymi funkcjami f w zależności $\dot{\sigma}$-$\dot{\varepsilon}$ ($f = f(\dot{\sigma},\dot{\varepsilon})$). Zgodnie z teorią małych odkształceń, całkowite odkształcenia $\dot{\varepsilon}$ rozdzielić można na część sprężystą $\dot{\varepsilon}^e$ i część niesprężystą $\dot{\varepsilon}^p$:

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{\alpha,\beta} + \dot{u}_{\beta,\alpha}) = \dot{\varepsilon}^e_{\alpha\beta} + \dot{\varepsilon}^p_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\dot{\sigma}_{\gamma\delta} + \dot{\varepsilon}^p_{\alpha\beta} \quad , \tag{4}$$

gdzie $\alpha,\beta,\gamma,\delta = 1,2$.

Naprężenia niesprężyste $\dot{\sigma}^p_{\alpha\beta}$ wyrazić można następująco:

$$\dot{\sigma}^p_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\dot{\varepsilon}^p_{\gamma\delta} \quad , \quad E_{\alpha\beta\gamma\delta} = C^{-1}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{5}$$

Do rozwiązania zadania zastosowano pośrednią wersję BEM [2], odpowiadającą algorytmowi sił fikcyjnych b^p i $\dot{p}^p$, ze względu na niższy rząd osobliwości w porównaniu do algorytmów wstępnych naprężeń lub wstępnych odkształceń:

$$\dot{p}^p_\alpha = -\dot{\sigma}^p_{\alpha\beta}\,n_\beta = -(2\mu\dot{\varepsilon}^p_{\alpha\beta} + \lambda\delta_{\alpha\beta}\dot{\varepsilon}^p_{\gamma\gamma})\,n_\beta = -2\mu\dot{\varepsilon}^p_{\alpha\beta}\,n_\beta \quad , \tag{6}$$

$$b^p_\alpha = -\dot{\sigma}^p_{\alpha\beta,\beta} = -(2\mu\dot{\varepsilon}^p_{\alpha\beta} + \lambda\delta_{\alpha\beta}\dot{\varepsilon}^p_{\gamma\gamma})_{,\beta} = -2\mu\dot{\varepsilon}^p_{\alpha\beta,\beta} \quad , \tag{7}$$

Równania BEM dla żelbetowej tarczy zarysowanej przedstawiają się następująco:

$$\dot{u}_\alpha(\underline{x}) = \int_{\partial\Omega} \Phi_\gamma(\underline{y})\,U_{\alpha\gamma}(\underline{x},\underline{y})\,d\partial\Omega + \int_\Omega \dot{b}^p_\gamma(\underline{y})\,U_{\alpha\gamma}(\underline{x},\underline{y})\,d\Omega +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \dot{p}^p_\gamma(\underline{y})\,U_{\alpha\gamma}(\underline{x},\underline{y})\,d\partial\Omega + \int_{s'} \Phi_\gamma(\underline{y})\,U_{\alpha\gamma}(\underline{x},\underline{y})\,ds' + \int_s \rho(\underline{y})\,U^\rho_\alpha(\underline{x},\underline{y})\,ds +$$

$$+ \int_s \kappa(\underline{y})\,U^\kappa_\alpha(\underline{x},\underline{y})\,ds + \sum_{i=1}^{m}\left[\int_{z_i} \tau(\underline{z})\,U^\rho_\alpha(\underline{x},\underline{z})\,dz_i + \dot{u}^{ki}_\alpha(\underline{x})\right] \quad , \tag{8}$$

$$\dot{\sigma}_{\alpha\beta}(\underline{x}) = \int_{\partial\Omega} \Phi_\gamma(\underline{y})\, S_{\gamma\alpha\beta}(\underline{x},\underline{y})\, d\partial\Omega + \int_{\Omega} \dot{b}^p_\gamma(\underline{y})\, S_{\gamma\alpha\beta}(\underline{x},\underline{y})\, d\Omega +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \dot{p}^p_\gamma(\underline{y})\, S_{\gamma\alpha\beta}(\underline{x},\underline{y})\, d\partial\Omega + \int_{s'} \Phi_\gamma(\underline{y})\, S_{\gamma\alpha\beta}(\underline{x},\underline{y})\, ds' + \int_{s} \rho(\underline{y})\, S^{\rho}_{\alpha\beta}(\underline{x},\underline{y})\, ds +$$

$$+ \int_{s} \kappa(\underline{y})\, S^{\kappa}_{\alpha\beta}(\underline{x},\underline{y})\, ds + \sum_{i=1}^{m} \left[\int_{z_i} \tau(\underline{z})\, S^{\rho}_{\alpha\beta}(\underline{x},\underline{z})\, dz_i + \dot{\sigma}^{ki}_{\alpha\beta}(\underline{x})\right] - \dot{\sigma}^{p}_{\alpha\beta}(\underline{x}) \quad . \tag{9}$$

Tutaj Ω oznacza obszar tarczy, Φ jest niewiadomą funkcją o wymiarze obciążenia ciągłego na $\partial\Omega$, $\underline{U}$ oraz $\underline{S}$ opisują znane rozwiązania fundamentalne odpowiednio w przemieszczeniach i naprężeniach, co dla indeksów ρ i κ definiuje rozwiązanie fundamentalne od sił stycznych i dipoli normalnych, zaś m oznacza liczbę prętów zbrojenia w rysie. Krzywa s' należy ponadto do krzywej s i pokrywa się z nią w miejscach gdzie nie występuje zbrojenie. Oznacza to, że naprężenia na brzegach rys poza miejscami prętów zbrojenia są równe zeru. Funkcja $\tau(z)$ symbolizuje znane z teorii rys rozkłady naprężeń przyczepności między betonem i zbrojeniem na odcinku z utraty przyczepności, opisane naprężeniami stycznymi. Wielkości $\dot{u}^k_\alpha$, $\dot{\sigma}^k_{\alpha\beta}$ uwzględniają dodatkowe efekty sił klockujących, zgniotu betonu, zazębiania się brzegów rys itp. przyłożone w miejscach występowania zbrojenia.

Rozwiązanie przedstawionego zadania wymaga jeszcze spełnienia warunków brzegowych na brzegu $\partial\Omega$ oraz warunków granicznych w rysie g(s). Prawo fizyczne opisujące rozwieranie się rysy przyjęto na podstawie analogii belkowej [3] oraz ogólnych założeń teorii rys, rozdzielając podobnie jak we wzorze (4) efekty sprężyste $\dot{g}^e N_{nn}$ i niesprężyste $\dot{g}^p$:

$$\dot{g}(s) = \dot{g}^p(s) + \dot{g}^e(s)\, N_{nn}(s) \quad . \tag{10}$$

Tutaj N_{nn} oznacza napięcie normalne w rysie. Szersze omówienie związku (10) znaleźć można w pracy [1].

Dla płaskiego stanu naprężenia rozwiązanie fundamentalne $G(\underline{x})$ przyjęto wg [4] w postaci:

$$G(\underline{r}) = \frac{1}{16\Pi}\, \underline{r}^2 \ln \underline{r}^2 \quad , \tag{11}$$

gdzie $r^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2$ i $\phi_\alpha = x_\alpha - y_\alpha$

Przyjęcie funkcji fundamentalnych w postaci (11) powoduje, że równania (8) i (9) dla warunków brzegowych i granicznych sprowadzają się do układu silnie osobliwych równań różniczkowo-całkowych na niewiadome Φ, ρ i κ. Po ich obliczeniu wzory (8) i (9) stanowią wynikową strukturę rozwiązania żelbetowej tarczy zarysowanej.

4. REALIZACJA NUMERYCZNA ZADANIA

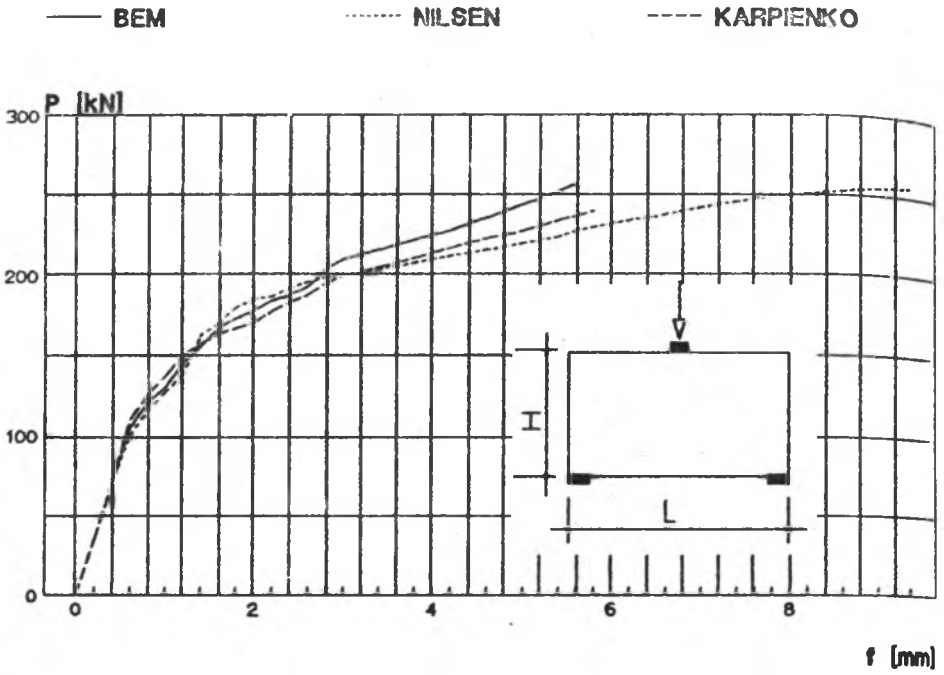
Algorytm analizy przemieszczeń i naprężeń aproksymowanych BEM polega na generowaniu równań różniczkowo-całkowych do układu równań algebraicznych, przy zachowaniu przyrostowego rozwiązania metodą iteracji. Szersze omówienie numerycznych zagadnień wykorzystanych tu procedur iteracyjnych oraz ich zbieżności stanowi osobny rozdział metod numerycznych i wykracza poza ramy niniejszej pracy. Założono zatem, że rozwiązanie zadania istnieje i jest jednoznaczne, a proces iteracyjny jest zawsze bezwzględnie zbieżny.

Współczynniki układu równań obliczane są z całek po elementach brzegowych. Całki te wylicza się z iloczynu funkcji kształtu i osobliwych rozwiązań fundamentalnych. Niektóre z tych całek są niewłaściwe w sensie definicji klasycznej lub definicji Cauchy'ego. Próby testowych obliczeń numerycznych całek osobliwych dawały znaczne błędy, stąd obliczono je metodą analityczną z funkcji wymiernej po zamianie układu współrzędnych i transformacji wyniku do układu globalnego.

Opracowano program "Disc", w którym symulacja numeryczna zarysowania polegać może na przyjmowaniu zadanego układu rys lub na generowaniu rys z przyrostowego obciążenia konstrukcji i sprawdzaniu obszarów wytężenia powodujących zarysowanie. Zastosowano kryterium pojawienia się rys w kierunku normalnym do głównego naprężenia rozciągającego, dla wytrzymałości betonu przekraczającej wartość rysującą oraz w odległościach miedzy rysami l_f, zgodnie z teorią rys.

Przykładową symulację obciążeń i ugięć żelbetowej tarczy prostokątnej pokazano na rysunku nr 1. Dokonano porównania obliczeń metodą elementów brzegowych z wynikiem doświadczenia przeprowadzonego dla tarczy nr 103 przez Nilsena [5] oraz obliczeń wykonanych przez Karpienkę [6]. Tarcza rozpiętości $L = 2.0$ m, wysokości $H = 1.0$ m, grubości $h = 0.08$ m i wytrzymałości cylindrycznej betonu $R_c = 37.0$ MPa zbrojona była siatką ortogonalną o oczku 10x10 cm ø 6 mm. Siła skupiona P przyłożona była na

górnej krawędzi tarczy w połowie jej rozpiętości. W rozwiązaniu przyjęto beton opisany wg CEB parabolą madrycką.



Rys.1. Porównanie ugięć tarczy zarysowanej

Fig.1. Comparison of deflection of RC cracked disc

W wyniku analizy tarczy metodą elementów brzegowych otrzymano zadowalającą zbieżność modelu obliczeniowego z doświadczeniem w obszarze obciążeń użytkowych (dla siły poniżej P = 200.0 kN). Przy wzroście siły powyżej P = 200.0 kN występuje zwiększenie rozbieżności pomiędzy BEM i doświadczeniem. Tłumaczyć to można m. in. brakiem w modelu odpowiednich kryteriów granicznych wytężenia materiałów konstrukcyjnych, z których wykonana jest tarcza. Ze względu na szeroką możliwość praktycznych zastosowań inżynierskich konieczne jest dalsze testowanie przedstawionej metody obliczeniowej oraz uzupełnienie jej o kryteria graniczne wytrzymałości betonu dla stanów dwuosiowych, oparte np. na założeniach teorii plastyczności.

LITERATURA

[1] Minch M., Metoda teoretycznego wyznaczania naprężeń w żelbetowych tarczach zarysowanych, Rozp. Inż., 1980, T. 28, Z. 3, s. 445-468.

[2] Brebbia C.A., Telles J., Wróbel L., Boundary element techniques - theory and applications in engineering, Springer Verlag, Berlin - New York 1984.

[3] Borcz A., Podstawy teorii zarysowanych płyt żelbetowych, TNEB, Warszawa 1963.

[4] Gelfand I. M., Szyłow G.E.: Obobszczennyje funkcji i diejstwija nad nimi, Fizmatgiz, Moskwa 1959.

[5] Nilsen M.P.: Limit Analysis of RC Slabs, Acta Politechnica Scandinavica, Gi. 26, Copenhagen 1964.

[6] Karpienko N.I.: Teorija deformirowanija żelezobietona s trieszczinami, Strojizdat, Moskwa 1976.

NONLINEAR MODELING OF CRACKED RC DISCS BY BOUNDARY ELEMENT METHOD

The paper presents an application of boundary element method to nonlinear analysis of RC cracked discs. Up to now RC discs are designed as elastic, isotropic and homogeneous. So, a method of calculating RC discs under loading that would enable estimation of changes caused by cracks in the distribution of internal forces is still needed. The paper presents these demands because it assumes that the most important attribute of RC construction is their heterogeneity, i.e. the defects caused by cracks.

The model of crack is based on the mathematical theory of defects. Using the logarithmic potential of single and double layer as well as fundamental solution G for two dimensional stress state the Burgers vector of the dislocation line $\Gamma(s)$ - means defect line (Eq.1.) was obtained. The crack is treated as a defect causing a jump of displacements at the very place of its appearance. The size of that jump is equal to the opening of the crack. In addition the vector of tension is continuous (Eq.2.). The Eq.1. and Eq.2. are satisfied by the forces in form of tangential forces $\rho(s)$ and normal dipole forces (Eq.3.)

The solution of cracked RC disc (Eq.8. and Eq.9. - set of integro-differential equations) was obtained as nonlinear by help of boundary element method in an incremental form of formulation. The constitutive law of the crack was taken in separating form for the elastic and nonelastic effects (Eq.10.).

The theoretical equations (Eq.8. and Eq.9.) was solved numerically. The results of comparison between method presented above and other theoretical method (Karpienko) as well as the experimental findings (Nilsen) are shown in the Fig.1.