ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1992

Seria: MECHANIKA z. 107 Nr kol. 1154

Валерий Пилипчук

Химико-технологический институт

Днепропетровск

К РАСЧЕТУ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

Streszczenie. W pracy przedstawiono zagadnienie osobliwe (nieciągłe) odpowiadające mechanicznym układom z okresowym impulsowym wymuszeniem. Metoda ta oparta jest na transformacji specjalnej funkcji okresowych stosujących funkcje o postaci piłokształtnej i skokowe o amplitudzie jednostkowej i ich uogólnienia.

Резюме. При помощи специального преобразования переменных включаещего негладкое преобразование времени задача построения периодических решении для систем с периодическим импульсным воздействием сводится к краевой задаче на стандартном интервале. При этом специфика преобразования позволяет исключить содержащиеся в исходной системе сингулярные члены описывающие импульсные воздействия. Это наиболее существенно в нелинейных случаях когда применение теории обобщенных функции распределении. требует известной осторожности.

Summary. The singular (and discontinuous) terms exception method for non-linear differential equations, corresponding to mechanical systems with the periodic impulsive excitation, is presented. The method is based on the special periodic functions transformation using the saw-tooth piecewise-continuous function and its generelized derivative.

1. ВВЕДЕНИЕ

Действие мгновенных импульсов на механическую систему моделируется обычно одним из следующих двух способов: 1.подчинением координат и скоростей дополнительным условиям отражающим представления о характере влияния импульсов на систему. в окрестностях точек локализации импульсов, например — заданием скачков скоростей в моменты внешних ударов, 2. введением в уравнения сингулярных членов типа δ-функции Дирака.

Основное достоинство первого подхода в том, что описывающие систему дифференциальные уравнения такие же, как и при отсутствии импульсов [1]. Второй способ дает единую систему уравнений на всем временном интервале без введения упомянутых выше условий на переменные, но требует, строго говоря, рассмотрения задачи в рамках теории распределений см. ,например, библиографию в [2]. , а это в нелинейных случаях приводит к определенным ограничениям на класс используемых функций [3].

Ниже описан метод, позволяющий, с одной стороны, исключить сингулярные члены в уравнениях, а с другой – получить решения в виде единого аналитического выражения на всем временном интервале.

2. ОПИСАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

2.1. Система дифференциальных уравнений первого порядка

Рассмотрим механическую систему с периодическим возбуждением, описываемую уравнением

$$\dot{x} = f(x,\varphi) + p\tau''(\varphi); \quad x \in R^n, \ \varphi = \omega t \ , \tag{1}$$

где период правой части по переменной φ равен четырем, p -постоянный n-мерный вектор, вектор-функция f - регулярная составляющая правой части -предполагается непрерывной по каждой из совокупности переменных x и кусочно-непрерывной по переменной φ: допускаются разрывы первого рода в точках локализации периодически действующих δ-импульсов

$$\tau''(\varphi) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big[\delta(\varphi+1-4k) - \delta(\varphi-1-4k)\Big] \ ,$$

представленных в виде обобщенной производной второго порядка пилообразной кусочно-гладкой функции $\tau(\varphi)$ с единичной амплитудой и периодом, равным четырем рис. 1. принятая нормировка периода удобна ввиду существенного в дальнейших преобразованиях равенства $\tau'^2 = 1$.

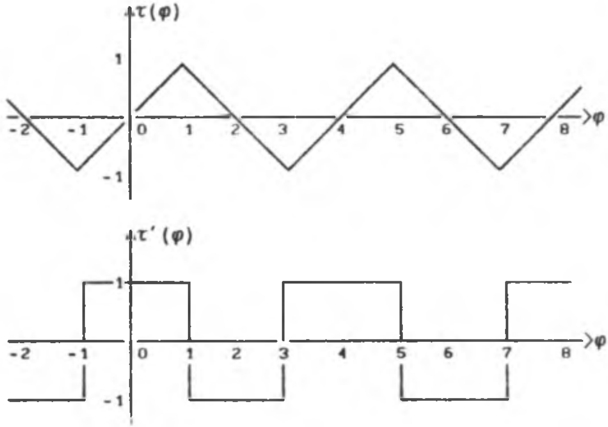

Рис. 1.

Сделанные допущения позволяют рассматривать равенство (1) в смысле распределений по переменной τ.

Будем разыскивать периодическое решение уравнения (1) в форме [4]

$$x = X(\tau) + Y(\tau)\tau', \quad \tau = \tau(\varphi) \tag{2}$$

где X, Y - подлежащие определению вектор-функции. Идея представления искомого решения в форме (2) основана на возможности представления любой периодической с периодом 4. функции в форме (2) см. ниже (19)..

Подставляя (2) в (1), будем иметь

$$\omega Y' - R_f + (\omega X' - I_f)\tau' + (Y\omega - p)\tau'' = 0 , \tag{3}$$

где

$$\left\{ \begin{matrix} R_f \\ I_f \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\left[f(X+Y,\tau) \pm f(X-Y,2-\tau)\right] .$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\omega Y' = R_f, \quad \omega X' = I_f \tag{4}$$

и краевые условия

$$Y_{\tau=\pm 1} = \frac{p}{\omega} . \tag{5}$$

При $p = 0$, т.е. когда сингулярная периодическая составляющая в исходном уравнении отсутствует, краевые условия становятся однородными это соответствует регулярной правой части в уравнении (1). В обоих случаях преобразованная система не содержит сингулярных членов.

Отметим, что специально построенные негладкие преобразования пространственных переменных позволяют исключить ударные члены в уравнениях для систем с ограничителями [5].

Пример. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = Mx + p\tau''(\varphi) \quad , \varphi = \omega t \ ,$$

где M - постоянная невырожденная $n\times n$ -матрица.

Уравнения (4) в данном случае имеют вид

$$\omega Y' = MX, \quad \omega X' = MY \ . \tag{6}$$

Исключив из второго уравнения вектор X при помощи первого уравнения

$$X = \omega M^{-1}Y' \ , \tag{7}$$

будем иметь уравнение

$$\omega^2 Y'' - M^2 Y = 0 \ . \tag{8}$$

Обозначим через e_j $(j = 1,\dots,n)$ ортонормированную систему собственных векторов матрицы M^2, при этом предположим, что первым l векторам соответствуют положительные собственные значения, а остальным $n-l$ - отрицательные

$$M^2 e_j = \begin{cases} \lambda_j^2 e_j, & j = 1,\dots,l \\ -\lambda_j^2 e_j, & j = l+1,\dots,n \ . \end{cases}$$

Тогда решение краевой задачи (5), (8) будет иметь вид

$$Y = \frac{1}{\omega}\left[\sum_{j=1}^{l} p^j e_j \frac{\operatorname{ch}\left(\lambda_j \frac{\tau}{\omega}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\lambda_j}{\omega}\right)} + \sum_{j=l+1}^{n} p^j e_j \frac{\cos\left(\lambda_j \frac{\tau}{\omega}\right)}{\cos\left(\frac{\lambda_j}{\omega}\right)}\right], \tag{9}$$

где $p^j = e_j^T p$ - координаты вектора p в базисе $\{e_1,\dots,e_n\}$.

Подставляя (9) в (7), получим выражение для вектор-функции X. Анализ решения показывает, что если при каком-либо $j = l+1,\dots,n$ величина ω удовлетворяет уравнению

$$\cos\left(\lambda_j/\omega\right) = 0 \ , \tag{10}$$

то в системе имеет место резонанс.

2.2. Система дифференциальных уравнений второго порядка

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{x} = f(\dot{x},x,\varphi) + p\tau''(\varphi); \quad x \in R^n, \ \varphi = \omega t \ , \tag{11}$$

где функция f непрерывна по $\dot{x}$, а по остальным переменным удовлетворяет тем же требованиям, что функция f в уравнении (1).

В данном случае периодический сингулярный член, появляющийся при дифференцировании представления (2), следует сохранить во второй производной предварительно исключив такой член в первой производной. Тогда вместо (4),(5) получим краевую задачу

$$\omega^2 X'' = R_f, \quad \omega^2 Y'' = I_f; \tag{12}$$

$$X'\ _{\tau=\pm1} = p/\omega^2, \quad Y\ _{\tau=\pm1} = 0, \tag{13}$$

где

$$\left\{\begin{matrix} R_f \\ I_f \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[f(\omega(Y'+X'),X+Y,\tau) \pm f(\omega(Y'-X'),X-Y,2-\tau)\right] .$$

Пример. Рассмотрим осциллятор Дюффинга с периодическим импульсным воздействием

$$\ddot{x} = -k^2x - \varepsilon x^3 + p\tau''(\omega t),$$

где $\varepsilon \ll 1$ - малый параметр квазилинейный случай..

В данном случае можно принять $Y \equiv 0$ и для X-составляющей решения будем иметь уравнение

$$\omega^2 X'' + k^2 X = -\ \varepsilon X^3. \tag{14}$$

Решение квазилинейной краевой задачи (13),(14) может быть найдено методом Пуанкаре-Ляпунова. Полагаем

$$X = X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \dots, \tag{15}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2\left(1 + \varepsilon\gamma_1 + \varepsilon^2\gamma_2 + \dots\right), \tag{16}$$

где левая часть второго разложения известна заранее.

Подставляя (15),(16) в (13),(14) и разделяя порядки по ε, получим последовательность краевых задач. Исключая на каждом шаге секулярные по τ члены при помощи величин γ и удовлетворяя краевым условиям за счет соответствующего выбора постоянных интегрирования, в первых двух приближениях получаем

$$X_0 = A_0 \sin\frac{k}{\omega_0}\tau, \quad A_0 = p/\left(\omega_0 k \cos\frac{k}{\omega_0}\right), \quad \gamma_1 = \frac{3}{4}\,\frac{A_0^2}{k^2},$$

$$X_1 = -\gamma_1\left[\left(A_0 - \cos 3\frac{k}{\omega_0} \Big/ \left(8\cos\frac{k}{\omega_0}\right)\right)\sin\frac{k}{\omega_0}\tau + \frac{A_0}{24}\sin 3\frac{k}{\omega_0}\tau\right].$$

Величина ω_0 связана с известной величиной ω равенством (16). После соответствующих преобразований из уравнения $\cos\left(k/\omega_0\right) = 0$ находим семейство скелетных кривых в плоскости $\omega - A_0$:

$$\omega = \frac{2k}{\pi(2j-1)}\left[1 + \frac{3}{8}\,\frac{A_0^2}{k^2}\,\varepsilon + o(\varepsilon)\right], \quad (j = 1,2,3,\dots),$$

где множитель $2/\pi$ есть следствие различия нормировок периода пилообразного и тригонометрического синусов.

Заметим, что в случае периодического импульсного возбуждения постоянного направления, сингулярная составляющая в уравнении может быть выражена через пилообразную функцию так возможны и другие выражения, эквивалентные данному с механической точки зрения.

$$-\mathrm{sign}(\tau)\tau''(\varphi) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\varphi-1-2k)\,. \tag{17}$$

Описанные выше преобразования могут быть выполнены и в этом случае, при этом уравнения (6),(12) сохранят свой вид, а в краевых условиях появиться асимметрия

$$Y_{\tau=\pm1} = \mp\, p/\omega \quad \text{и} \quad X'_{\tau=\pm1} = \mp\, p/\omega^2$$

соответственно в соотношениях (5) и (13).

3. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ

Рассмотрим случай параметрического возбуждения на примере линейной системы, описываемой уравнением вида

$$\ddot{x} + \left[q(\varphi) + p\tau''(\varphi)\right]x = 0, \quad \varphi = \omega t, \tag{18}$$

где p - постоянная $n\times n$ - матрица, q - матрица такой же размерности периодически с периодом 4 и кусочно-непрерывно зависящая от φ допускаются разрывы первого рода в точках локализации импульсов $\tau''(\varphi)$.

Представим регулярную составляющую параметрического возбуждения в виде

$$q(\varphi) = Q(\tau) + P(\tau)\tau', \quad \left\{\begin{matrix} Q \\ P \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[q(\tau) \pm q(2-\tau)\right]; \quad \tau = \tau(\varphi) \tag{19}$$

и периодические с периодом 4 по переменной $\varphi = \omega t$ решения уравнения (18) будем разыскивать в форме (2).

Подставляя (2),(19) в уравнение (18) и принимая во внимание при этом равенство $\tau'^2 = 1$, при необходимом условии непрерывности вектор-функции x

$$Y_{\tau=\pm 1} = 0 \tag{20}$$

получим

$$\left(\omega^2X'' + QX + PY\right) + \left(\omega^2Y'' + PX + QY\right)\tau' + \left(\omega^2X' + pX\right)\tau'' + pY\tau'\tau'' = 0.$$

Последнее слагаемое в левой части равенства следует отбросить, поскольку в смысле распределений $\tau'\tau'' = 0$. Оставшаяся часть равенства дает

$$\omega^2X'' + QX + PY = 0; \quad \omega^2Y'' + PX + QY = 0; \tag{21}$$

$$\left(\omega^2X' + pX\right)_{\tau=\pm 1} = 0. \tag{22}$$

Вместе с (20) это образует краевую задачу для определения величин ω при которых периодические решения существуют, и соответствующих вектор-функций X,Y.

Заметим, что в случае импульсов постоянного направления в условии (22) необходимо вместо p поставить $\pm p$ или $\mp p$ в зависимости от направления действия импульсов.

Пример. Рассмотрим задачу о собственных колебаниях бесконечной струны на регулярно расположенных линейно-упругих опорах:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\gamma u\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\eta/ \ \ - 1-2k) = 0, \quad (-\infty<\eta<\infty), \tag{23}$$

где $u = u(t,\eta)$- координаты точек струны, ρ- погонная плотность, T - натяжение, 2γ - средняя по длине струны, k- жесткость опор.

В случае собственных колебаний полагаем

$$u = \exp(i\lambda t)\left[X(\tau) + Y(\tau)\tau'\right], \quad \tau = \iota(\eta/\ ). \tag{24}$$

Подставляя это выражение в уравнение (23), предварительно выразив в нем сингулярный член посредством (17) через $\iota(\eta/\ )$, приходим к линейной краевой задаче

$$X'' + k^2X = 0, \quad \left(X' \pm pX\right)_{\tau=\pm1} = 0;$$

$$Y'' + k^2Y = 0, \quad Y_{\tau=\pm1} = 0,$$

где

$$k = \lambda\ (\rho/T)^{1/2}, \quad p = \ ^2(\gamma/T).$$

Отсюда находим:

$$X = A\sin(k\tau),\ Y \equiv 0; \quad tg(k) = -p/k;$$

$$X = A\cos(k\tau),\ Y \equiv 0; \quad tg(k) = p/k;$$

$$Y = A\sin(k\tau),\ X \equiv 0; \quad k = j\pi;$$

$$Y = A\cos(k\tau),\ X \equiv 0; \quad k = j\pi - \pi/2; \quad j=1,2,\ldots,$$

где A-произвольный постоянный множитель, решения трансцендентных уравнений для k хорошо известны и имеются в соответствующей справочной литературе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Самойленко А.М., Перестюк .А.: Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Вища школа, Киев 1987.

[2] Liu Zheng-rong: Discontinuous And Impulsive Excitation.-Applied Mathematics and Mechanics (English Edition).-Vol.8,No.1(1987),31-35.

[3] Куфнер А., Фучик С.: Нелинейные дифференциальные уравнения. Наука, Москва 1988.

[4] Пилипчук В.Н. Об использовании виброударных систем в качестве порождающих при исследовании нелинейных колебательных процессов. ZN Pol. Sl., 1990. ser. Mechanika, z.103, s.197-200.

[5] Журавлев В.Ф.: Метод анализа виброударных систем с помощью специальных функций. Изв. АН СССР. МТТ. 1976, №2, с.30-34.

ON CALCULATION OF THE PERIODIC PROCESSES IN MECHANICAL SYSTEMS WITH IMPULSIVE EXCITATION

The influence of fast changing impulses on mechanical systems is usually modelled either by:

- dependence of coordinates and velocities on additional conditions which show the character of impulse influence on the system in some neighborhood of their application point e.g. application of velocities transition in external impacts,
- introducing singular terms δ-Dirac's function type into equation.

The basic advantage of the first way of modelling is the fact that differential equations describing systems are the same as in case of no-impulse system [1]. The second way of modelling yields uniform equations system for all intervals without introducing above mentioned conditions for varies but consideration of this task within distribution theory is required [2]. In nonlinear cases it leads us to limitation of available functions class [3].

In the paper the method allowing to eliminate singular terms in equations and obtain solution in uniform analytic terms form for all intervals is presented.