ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1992

Seria: MECHANIKA z. 107 nr kol. 1154

Хабибулла Туранов

Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта

МЕХАНИКА РОТОРОВ С УПРУГИМИ СВЯЗЯМИ

Streszczenie. W pracy rozpatruje się uogólniony schemat obliczeń, zestawiono i rozwiązano równanie drgań skrętnych wirników szerokiej klasy maszyn.

Резюме. Рассматривается обобщенная расчетная схема, составлено и решено уравнение крутильных колебаний роторов широкого класса машин.

Summary. We consider the generalized calculation scheme and suggest the composition and the decision of the wide class machines turning vibrations rotors equation.

Решение уравнения крутильных колебаний позволяет на основе эксперементальных данных о касательных напряжениях в некоторых сечениях вала и моментах трения в опорах определить динамические напряжения кручения в любых сечениях вала.

Вал рабочего барабана представляется состоящим из K участков. Для каждого участка с номером i считаются постоянными величины его диаметра и материал вала.

Будем считать, что на каждый фиксированный участок действуют либо только сосредоточенные нагрузки со стороны приводов и опор, либо только распределенные нагрузки, либо нет рагрузок от приводов, но на участке расположен упругий элемент с коэффициентом затухания крутильных колебаний λ_i.

В противном случае увеличением числа участков вала можно прийти к выполнению этих условий. Пусть вал вытянут вдоль оси Z.

Обозначим: Z_{i-1}, Z_i – аппликаты границ участка с номером i, полагая $Z_0=0$;

G_i – жесткость вала на кручение;

I_i – интенсивность момента инерции.

Пусть a_j – аппликата сосредоточенного момента, m – число сосредоточенных моментов, j – номер момента.

Примем, что сосредоточенные крутящиеся моменты изменяются по закону

$$T_j(t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{jn} \cos \frac{\omega n}{2N} t, \qquad (1)$$

где N – период времени, в течении которого моделируется движение барабана, выраженный в целом числе оборотов.

Примем, что распределенная нагрузка изменяется по закону

$$\mu_i(z,t) = \sum_{n=0}^{n1} \Bigg\{ \mu_{in} \left(\mathcal{S}_0 (Z-Z_{i-1}) - \mathcal{S}_0 (Z-Z_i)\right) +$$

$$+ (\bar{\mu}_{in} - \mu_{in}) \left[\frac{(Z-Z_{i-1})}{l_i-Z_{i-1}} \left\{ \mathcal{S}_0 (Z-Z_{i-1}) - \mathcal{S}_0(Z-l_i) \right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{Z-Z_i}{Z_i-l_i} \left\{ \mathcal{S}_0 (Z-l_i) - \mathcal{S}_0(Z-Z_i) \right\} \right] \cos \frac{\omega n}{2N} t \Bigg\}, \qquad (2)$$

где μ_{in} и $\bar{\mu}_{in}$ – минимальное и максимальное значения интенсивности внешней нагрузки $\mu(z,t)$;

$\mathcal{S}_0$ – единичная функция Хевисайда.

Закон изменения внешних нагрузок представляет собой ломанную линию с двумя звеньями с одинаковыми значаниями нагрузок в крайних точках, с аппликатой l_i общего конца звеньев.

При необходимости представления произвольной распределенной нагрузки произвольной ломанной линией с N_0 звеньями вал следует разбить на N_0 участков, полагая $Z_{i+1} = l_i$.

Подобное представление есть линейная интерполяция плотностей значении внешних моментов, которые могут быть получены из осциллограмм эксперементальных исследований. В случае отсутствия распределенной нагрузки будем пологать $l_i=-1$.

Для данной расчетной схемы ,обобщающей расчетную схему [1] , исходя из выражений кинетической и потенциальной энергии и вариационного принципа Острогродского-Гамильтона составим уравнение Эйлера

$$I(z)\frac{\partial^2\Theta(z,t)}{\partial t^2}-G(z)\frac{\partial^2\Theta(z,t)}{\partial z^2}+\lambda(z)\frac{\partial\Theta(z,t)}{\partial z}=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left(T_j(t)-I_i\frac{\partial^2\Theta(z,t)}{\partial^2 t}\right)\mathcal{S}_1(z-a_j)-\sum_{i=1}^{k}\mathcal{S}_0(l(i))\,\mu_i(z,t),\quad (3)$$

где $\Theta(z,t)$ – угол поворота сечения;

I_i – момент инерции шкива или звездочки;

($I_j=0$ – при действии тормозящего момента в опоре вала);

$\mathcal{S}_1(z)$ – дельта-функция Дирака;

$G(z)$ – жесткость вала при кручении;

$I(z)$ – интенсивность момента инерции;

$\lambda(z)$ – коэффициент затухания крутильных колебаний в материале упругого элемента

$$\lambda(z)=\frac{\lambda_0(Z)}{G(z)}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left[\mathcal{S}_0(Z_{i-1})-\mathcal{S}_0(Z_i)\right]$$

где λ_0– коэффициент сопротивления материала упругого элемента крутильным колебаниям.

Решение уравнения ищем в виде [I,(3)]

$$\beta(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(Z)\cos\frac{n\omega}{2N}t,$$

где $\beta(z,t)$ – угол закручивания сечений.

Отметим,что

$$\Theta(z,t)=\varphi(t)+\beta(z,t),\qquad (4)$$

где $\varphi(t)$ – угол поворота вала,как жесткого тела.

Подставляя (4) в (1) и учитывая уравнение вращения вала как твердого тела

$$I_b\ \varphi''(t) = T_0(t),$$

где I_b – момент инерции вала и присоединенных к нему масс;

$T_0(t)$ – результирующий крутящий момент действующий на вал, а также условия стыкования различных участков вала

$$\beta_i\ (Z_i - 0)=\beta_i(Z_i) \qquad [\ i=\overline{1,k}\ ]$$

аналогично [1] получим выражение амплитудных функций, условившись считать, что для любой функции $f(X)$, даже неопределенной точке X_0,

$\varphi(X_0)\ f(X_0)=0$, если $\varphi(X_0)=0$.

Отметим, что ряд параметров в обозначениях левой части равенств, например, X, являются формальными, и поэтому их обозначения могут совпадать с встречающимися ранее, что не вызывает неясностей

$$\beta_0(Z) = \beta_0(0) + \sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}_0\ (Z-Z_{i-1}) \left\{ \frac{(Z-Z_{i-1})\ e^{2\lambda_i(Z-Z_{i-1})}}{\bar{\lambda}_i} \left[\beta_0(Z_{i-1}) + (Z-Z_{i-1})\ L_{i0}\right] + C_{000}(Z) \right\} + E_0(Z)$$

$$\beta_n(Z) = F_{0n}(Z)\ \beta_n(0) + \sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}_0(Z-Z_{i-1})\ F_{in}(Z). \qquad (5)$$
$(n>0)$

$$\left\{ \Lambda_{in}(Z)\ \beta_n'(Z_{i-1})\ e^{\lambda_i(Z-Z_{i-1})} + L_{in}\left[\frac{2\ \delta^0_{\lambda i}}{Y^2_{in}}\ \mathrm{SIN}^2\ \frac{E_{inz}}{2}\ \bar{\delta}^0_{\lambda i} H_{in}(Z)\ e^{\lambda_i X_{in}(Z-Z_{i-1})} - 2\ \lambda_i X_{in}\right] + C_{0in}(Z) \right\} + E_n(Z), \qquad (6)$$

где $\delta^A_B = \mathcal{S}_0\ (A-B)\ \mathcal{S}_Q(B-A)$ –обобщение символа Кронекера при любых A и B;

$$\bar{\delta}^a_b = 1 - \delta^a_b\ ;$$

$$\bar{\lambda}_i = 2\ (\lambda_i + \delta^0_{\lambda i})\ ;$$

$$L_{in} = T_{0n} / J_b G_i \quad ;$$

$$C_{qin}(Z) = \mathcal{S}_0(l_i) \left\{ \frac{\bar{\mu}_{in} - \mu_{in}}{3} - \left[A_{qin}(Z,Z_{i-1}) + A_{qin}(Z,Z_i) + \frac{Z_{i-1} - Z_i}{(Z_{i-1} - l_i)\,(Z_i - l_i)} \overset{3}{B}_{qin}(Z,l_i) \right] + \mu_{in} \left[\overset{2}{B}_{qin}(Z,Z_i) - \overset{3}{B}_{qin}(Z,l_i) \right] \right\};$$

$$A_{qin}(Z,X) = \frac{\overset{3}{B}_{qin}(Z,X)}{l_i - X} \;;$$

$$\overset{m}{B}_{qin}(Z,X) = \mathcal{S}_0(Z-X)\ \Omega_q \left\{ \Omega_n \left[(Z-X)^m , \Omega_{m-2}\left(2SIN^2 \frac{\gamma_{in} Z}{2} ,COS(\gamma_{in} X) - \frac{2}{\gamma_{in}} SIN \frac{\gamma_{in} Z}{2} COS \frac{1}{2} \gamma_{in}(Z - 2X) \right) \right], \Omega_n \left[m\,(Z-X)^{m-1} ,\ \Omega_{m-2} \left[\gamma_{in} SIN\left(\gamma_{in} Z\right), - COS \left(\gamma_{in}(Z-X)\right) \right] \right] \right\} ;$$

$$\Omega_p(A,B) = A\ \mathcal{S}_0(- P) + B\ \mathcal{S}_0(P-1) \;;$$

$$E_n(Z) = \sum_{j=1}^{m} F_{N_{jn}}(Z)\ \tau_{jn}(Z) \;;$$

$$N(X) = \sum_{i=0}^{k-1} (X-Z_i) \;;$$

$$N_j = N(a_j)$$

$$F_{1n}(Z) = \Omega_n \left\{ 1, \Omega_{i+1-N(Z)} \left[\phi_{1+\mathcal{S}_0(-1),n}(Z),\ 1 \right] \right\} ;$$

$$\phi_{in}(Z) = e^{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathcal{G}_0(Z-Z_{i-1}) \bar{D}_i(Z)} \prod_{i=1}^{N(Z)} \frac{1}{\gamma_{in}} \begin{vmatrix} \cos\left(\gamma_{in} \bar{D}_i(Z)\right) & \lambda_i \,\mathrm{SGN}\, \Delta_{in} \\ \sin\left(\gamma_{in} \bar{D}_i(Z)\right) & \gamma_{in} \end{vmatrix};$$

$$\bar{D}_i(Z) = Z + \mathcal{G}_0(Z-Z_i)\,(Z_i-Z) - Z_{i-1};$$

$$\gamma_{in} = \sqrt{\left| \Delta_{in} \right|};$$

$$\Delta_{in} = \lambda_{in}^2 - \lambda_i^2;$$

$$\lambda_{in} = n\,\omega \left(\frac{I_{i-1}}{G_i} \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\tau_{jn}(Z) = \tau_{jn}^0(Z)\, \psi_n\left(D_i(Z) \right) \mathcal{G}_0\left(D_i(Z) \right);$$

$$\tau_{in}^0(Z) = \frac{1}{\gamma_j G_{Nj}} \left\{ I_j \left[\frac{T_{on}}{I_b} - \gamma_{N_{jn}}^2 \quad \omega^2 \beta_n (Z_{aj}) \right] - T_{jn} \right\};$$

$$\psi_n(X) = \Omega_n \left[X, \frac{1}{\gamma_{jn}} \sin(\gamma_{jn} X) \right];$$

$$D_j(Z) = Z\, \mathcal{G}_{N(z)}^{N_j} + Z_{Nj}\, \bar{\delta}_{N(z)}^{N_j} - Z_{Nj-1};$$

$$\Lambda_{in}(Z) = \frac{1}{\gamma_{in}} \operatorname{sgn} \Delta_{in} \sin \varepsilon_{in\,Z};$$

$$\varepsilon_{in\,Z} = \gamma_{in}(Z-Z_{i-1});$$

$$H_{in}(Z) = \frac{\Delta_{in}}{\left(2X_{in}^2 \lambda_i^2 - \lambda_{in}^2\right)} \begin{vmatrix} \cos \gamma_{in\,z} & \lambda_i \\ \sin \gamma_{in\,z} & \Delta_{in} \end{vmatrix} ;$$

$$X_{in} = \mathcal{F}_0 \left(-\Delta_{in} \right)$$

Объединяя (5) и (6), получим при любых $n \geq 0$

$$\beta_n(Z) = F_{0n}(Z)\, \beta_n(0) + \sum_{i=1}^{k} \mathcal{F}_0(Z-Z_{i-1})\, F_{in}(Z) \left\{ e^{a_{in}(Z-Z_{i-1})} M_{in}(Z) \beta'_n(Z_{i-1}) + \right.$$

$$\left. + L_{in} P_{in}(Z)\, e^{b_{in}(Z-Z_{i-1})} + C_{0in}(Z) \right\} + E_n(Z), \qquad (7).$$

где

$$a_{in} = \lambda_i\ \Omega_n\ (2,1)\ ;$$

$$b_{in} = 2\ \Omega_n \left(1, \lambda_i X_{in} \right)\ ;$$

$$M_{in}(Z) = \Omega_n \left[{}^{(Z-Z_{i-1})}\!/\ \bar{\lambda}_i\ , \Lambda_{in}(Z) \right]\ ;$$

$$P_{in}(Z) = \Omega_n \left\{ {(Z-Z_i)^2}\Big/\ \bar{\lambda}_i\ , \Omega_{\lambda i} \left[\frac{2}{\nu_{in}^2} \sin^2 \frac{\gamma_{inZ}}{2}\ , H_{in}(Z) - 2\lambda_i X_{in} \right] \right\}$$

Дифферинцируя (7) и воспользуясь связью граничных условий

$$G_i \beta'_z\ (Z-0,t) = G_i \beta'_z(Z_i,t), \quad i=\overline{2,K}$$

получим

$$\beta_n'(Z) = \left\{ F_{0n}'(Z)\beta_n(0) + \sum_{i=1}^{k} \mathcal{I}_0 (Z-Z_{i-1}) \left[e^{a_{in}(Z-Z_{i-1})} \left(F_{in}'(Z)\, M_{in}(Z) + a_{in}\, F_{in}(Z)\, M_{in}(Z) + F_{in}(Z)\, M_{in}'(Z) \right) \bar{\delta}_{Z_{i-1}}^{z}\, \beta_n' (Zi-1) + L_{in}\, e^{b_{in}(Z-Z_{i-1})} \left(F_{in}'(Z)\, P_{in}(Z) + b_{in}\, F_{in}(Z)\, P_{in}(Z) + F_{in}(Z)\, P_{in}'(Z) \right) + F_{in}(Z)\, C_{1in}(Z) + F_{in}'(Z)\, C_{0in}(Z) \right] + E_n'(Z) \right\} \left[\bar{\delta}_{Z_{N(Z)-1}}^{z} + \delta_{Z_{N(Z)-1}}^{z} \frac{G_{N'}(Z)}{G_{N(Z)}} \right], \quad (7`)$$

где $N'(Z) = N(Z) - \mathcal{I}_0(N(Z) - 2)$;

$F_{in}'(Z) = \mathcal{I}_0(n-1)\, \mathcal{I}_0\, (N(Z) - i - 1)$.

$$e^{\sum_{j=1'}^{k} \lambda_j \mathcal{I}_0(Z-Z_{j-1})\, \bar{D}_j(Z)} \quad \Omega_{k-i'-1}$$

$$\left[1, \frac{1}{\gamma_{N(Z),n}} \right] \begin{vmatrix} \cos \delta_{N(Z),n,z} & \operatorname{sgn} \Delta_{N(Z),n}\, \lambda^2_{N(Z)} + \gamma^2_{N(Z),n} \\ \sin \delta_{N(Z),n,z} & \lambda_{N(Z)}\, \gamma_{N(Z),n} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \left(1 - \operatorname{sgn} \Delta_{N(Z),n}\right) \left| \prod_{j=i}^{N_{(Z)}-1} \frac{1}{\gamma_{jn}} \begin{vmatrix} \cos \delta_{jnZ} & \lambda_j \operatorname{sgn} \Delta_{jn} \\ \sin \delta_{jnZ} & \gamma_{jn} \end{vmatrix} \right|;$$

$$i' = i + \delta_0 (-i);$$

$$P'_{in}(Z)=\Omega_n \left\{ 2 (Z-Z_{i-1}) \Big/ \bar{\lambda}_i, \Omega_{\lambda_i} \left[\frac{\text{SIN } \gamma_{inZ}}{\gamma_{in}}, \frac{\Delta_{in}}{\left(\gamma_{in}^2 - 2 X_{in} \lambda_i^2\right)} \right.\right.$$

$$\left.\left. \begin{vmatrix} \text{COS } \gamma_{inZ} & -\Delta_{in} \\ \text{SIN } \gamma_{inZ} & \lambda_i \end{vmatrix} \right] \right\};$$

$$L'_{in}(Z) = \text{sgn}\,\Delta_{in} \text{COS } \gamma_{inZ};$$

$$E'_n(Z) = \sum_{j=1}^{m} \tau^0_{jn}(Z) \left[\delta^{Nj}_{N(Z)} \Omega_n \left(1, \text{COS } \gamma_{Nj\,n\,z} \right) \right.$$

$$\left. F_{Njn}(Z) + \psi_n \left(Dj(Z) \right) F'_{Njn}(Z) \right] \mathcal{G}_0 \left(D_j(Z) \right).$$

Исходя из (7) аналогично [I] можно получить формулу для вычисления максимальных динамических напряжений в любом сечении вала

$$\tau(Z,t) = \frac{G_{N(Z)}}{W_{N(Z)}} \sum_{m=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} C_m \beta'_{mn}(Z) \text{ COS } \frac{n\omega}{2N} t,$$

где значения $\beta_{mn}(Z)$ отличаются граничными значениями $\beta_n(0)$, выбранными произвольно, а коэффициенты C_m получаются по методу Бидермана из условия равенства нулю крутящего момента на правом свободном конце вала.

ЛИТЕРАТУРА

[I-] Туранов Х. Т. , Карпухин Г. А.: К структурной и параметрической оптимизации систем соединенных цепными передачами рабочих органов барабанного типа.Межвед.респ.сб. Теория механизмов и машин. Вища школа ХГУ, Вып.47. Харьков 1989,с. 99-109.

MECHANICS OF ROTORS WITH ELASTIC TIES

In this paper a torsional vibrations equation was solved and dynamic torsional stresses were evaluated. Results of a measurement of tangential stresses in certain intersections and moments of friction in bearings as a input data were taken. The shaft was partitioned on K section. For each section "i" invariable diameter and constant mechanical properties were assumed.
Author considered concentrated drive and bearings load, only distributed load or no driving loads. Dumping coefficient for several shaft section was equal λ_i.
Author consider the generalized calculation scheme and suggest the composition and the decision of the wide class machines turning vibrations rotors equation.