ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994

Seria: MECHANIKA z. 116 Nr kol. 1231

Andrzej BUCHACZ, Józef WOJNAROWSKI
Katedra Mechaniki Robotów i Maszyn Roboczych Ciężkich
Politechnika Śląska

REKURENCYJNA FORMUŁA WYZNACZANIA PODATNOŚCI DYNAMICZNEJ UKŁADÓW PRĘTOWYCH O STRUKTURZE KASKADOWEJ W UJĘCIU GRAFÓW I LICZB STRUKTURALNYCH

Streszczenie. Przedstawiono sposób wyznaczenia rekurencyjnej formuły na podatność dynamiczną układu prętowego o strukturze kaskadowej. W tym celu zastosowano grafy i liczby strukturalne oraz agregacje hipergrafów. Otrzymana rekurencyjna zależność na charakterystykę dynamiczną stanowi podstawę jej oprogramowania w celu wyznaczania podatności dynamicznych n-odcinkowych drgających wzdłużnie lub skrętnie układów prętowych.

THE RECURRENT FORMULA OF DETERMINATION OF DYNAMICAL FLEXIBILITY OF BARSYSTEMS WITH CASCADE STRUCTURE REPRESENTED BY GRAPHS AND STRUCTURAL NUMBERS

Summary. In this paper a way of determination of a recurrent formula for a dynamical flexibility of a bar system with cascade structure has been presented. In order to attain the recurrent formula hypergraphs, their agregation, and structural numbers are used. An obtained recurrent form for a dynamical characterization determines a base to its programming in order to ottain the dynamical fexibilities for n-bars longitudinally or torsionally vibrating mechanical systems.

РЕКУРРЕНТНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОДАТЛИВОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С КАСКАДНОЙ СТРУКТУРОЙ ПРЕДСТАВЛЕННАЯ ГРАФАМИ И СТРУКТУРНЫМИ ЧИСЛАМИ

Резюме. В работе представлен метод определения рекуррентной зависимости касающейся динамической податливости стержневой системы с каскаядной структурой. Для этого применяются графы, структурные числа и агрегации гиперграфов, определенная рекуррентная зависимость на динамическую характеристику является основой для ее программирования чтобы определить динамические податливости n-стержневых продольно или крутильно колеблющихся механических систем.

1. WPROWADZENIE

Istotnym działem dynamiki układów technicznych, w tym maszyn, mechanizmów i urządzeń, jest dział zajmujący się drganiami. Badanie drgań układów dynamicznych jest ważnym problemem zarówno w obszarze zagadnień czysto praktycznych, naukowo-badawczych, jak i w zakresie dydaktyki ogólnie pojętej mechaniki.

Jeśli w wyniku określonych działań[1] otrzyma się model układu mechanicznego o parametrach skupionych i rozłożonych w sposób ciągły wraz z ich wartościami, to kolejnym etapem jest utworzenie jego modelu matematycznego. Stosowanie w analizie drgań złożonych układów aparatu matematycznego w postaci równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych bądź metod macierzowych, podatności i sztywności dynamicznych, macierzy przeniesienia i innych [2-4,6-8,10-15], które w dalszym ciągu będą nazywane metodami klasycznymi, jest możliwe w przypadku drgających mechanicznych układów o parametrach skupionych lub rozłożonych w sposób ciągły. Stosowanie klasycznego aparatu matematycznego równań rózniczkowych przysparza wiele znanych trudności, związanych z tworzeniem i rozwiązywaniem odpowiednich układów równań różniczkowych ruchu. W przypadku natomiast analizy układu zbudowanego z dużej liczby podukładów, a badanego za pomocą metod wymagających dekompozycji (przykładowo metodą podatności dynamicznej), wyznaczenie charakterystyk dynamicznych sprowadza się do wielu pracochłonnych i czasochłonnych działań. W ciągu ostatnich dwudziestu kilku lat w Ośrodku Gliwickim zaczęto rozwijać metody topologiczne i, mające z nimi ścisły związek, metody algebraiczne. Są to metody grafów i liczb strukturalnych, które dzięki sformalizowanemu sposobowi modelowania umożliwiają z jednej strony pełną algorytmizację i automatyzację obliczeń przy wyznaczaniu charakterystyki dynamicznej układu, z drugiej zaś - bezpośrednie śledzenie wprowadzonych zmian strukturalnych. Oprócz tego przez zastosowanie agregacji grafu można programować modyfikacje struktury bez zmiany wygenerowanej uprzednio liczby strukturalnej wyższej kategorii i odpowiadającej jej liczby strukturalnej zupełnej. Uzyskuje się to dzięki temu, że liczba strukturalna wyższej kategorii jest funkcją liczb strukturalnych niższych kategorii, a zatem po agregacji grafu zidentyfikowanie go liczbą strukturalną kategorii o jeden wyższą niż uprzednio pociąga za sobą jedynie konieczność wygenerowania liczby strukturalnej najwyższej przyjętej kategorii.

Przedstawiona zatem praca dotyczy sformułowania i badania złożonych ciągłych układów mechanicznych w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. Tak określony model układu mechanicznego stanowi podstawę do wyznaczenia charakterystyk dynamicznych, a w szczególności podatności dynamicznej.

Mimo że zadania tego typu są rozpowszechnione w dynamice drgających układów mechanicznych, to prezentowanie tych zadań w języku grafów i liczb strukturalnych wnosi wiele nowych elementów i wychodzi naprzeciw współczesnym algebraicznym metodom analizy oraz może prowadzić do dalszych uogólnień z zakresu badania drgających złożonych układów dynamicznych.

Najistotniejszym jednak elementem tego typu opisu jest fakt, iż w przypadku struktur regularnych, a do takich należy struktura[2] kaskadowa prętów, zastosowanie agregacji

---

[1] Zagadnienie to stanowi treść problemu identyfikacji (por. np. [9]) układów mechanicznych i wykracza poza zakres niniejszej pracy.

[2] Pojęcie struktury układu nie jest jednoznaczne i każdorazowo powinno być uściślone. W niniejszej pracy rozumie się je tak jak w pracach (por. np. [1,16-18]).

hipergrafu umożliwia w prosty sposób wygenerowanie rekurencyjnej formuły na podatność dynamiczną. I ten właśnie problem stanowi istotę niniejszej pracy, bowiem specyfika prezentowanego opisu i jego algebraizacja metodą liczb strukturalnych, a w szczególności zastosowanie funkcji wyznacznikowej, określonej na tych liczbach, umożliwia prowadzenie analizy bez żadnych ograniczeń nałożonych na rodzaje i liczbę elementów złożonego ciągłego układu mechanicznego przy wykorzystaniu elektronicznej techniki obliczeniowej.

2. WYZNACZENIE REKURENCYJNEJ FORMUŁY NA PODATNOŚĆ DYNAMICZNĄ UKŁADU PRĘTOWEGO W UJĘCIU HIPERGRAFÓW I LICZB STRUKTURALNYCH

W pracy [5] sformalizowano modelowanie drgającego wioloodcinkowego układu prętowego obciążonym hipergrafem, jako zasobu określonych środków opisu rozważanej struktury modelu, w odróżnieniu od intuicyjnego wprowadzania hipergrafu obciążonego jako modelu tej klasy układu. Przechodząc zatem do problemu wyznaczenia podatności dynamicznej układu dwuprętowego, rozważa się jego model - przykładowo swobodny - pokazany na rys. 1.

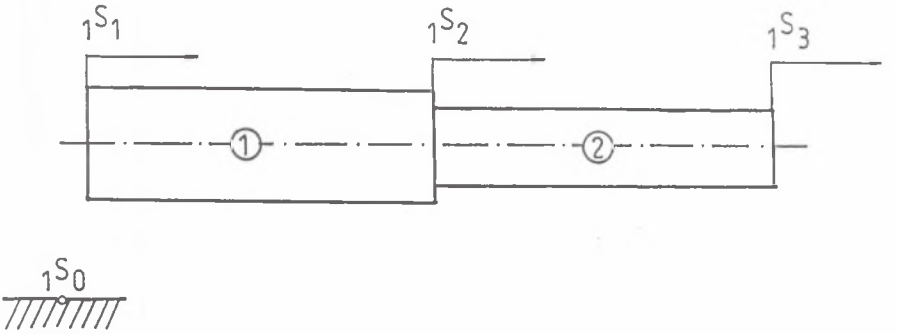
Na rys. 2 przedstawiono natomiast hipergraf układu i szkielet hipergrafu.

Liczba strukturalna dopełniająca $A^d{}_0$ szkieletu (rys. 2) jest równa

$$A_0^d = [b_1 \ a_2] \ , \tag{1}$$

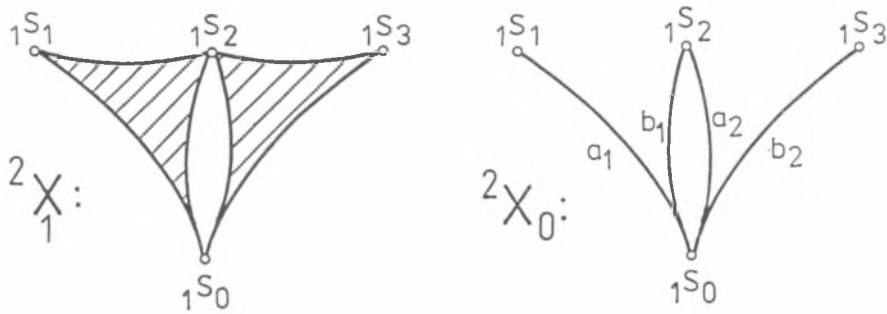
a zatem liczba strukturalna ${}^2A$ hipergrafu (rys. 2) wynosi

$${}^2A = [A_0^d] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1b} & A_1 \\ A_2 & A_{2a} \end{bmatrix} \ , \tag{2}$$



Rys. 1. Model dwuprętowego swobodnego układu drgającego wzdłużnie o strukturze kaskadowej

Fig. 1. A model of two-bar longitudinally vibrating free system with cascade structure



Rys. 2. Obciążony graf drugiej kategorii i jego szkielet
Fig. 2. The weighted second category graph and its skeleton

Aby wyznaczyć podatność dynamiczną w przekroju pręta, w którego osi podłużnej odmierza się ogólnioną współrzędną $_1s_3$, należy jeszcze wyliczyć pochodną algebraiczną $^2A_{b2}$ liczby strukturalnej ^2A jako

$$^2A_{b_2} = [b_2]\,|[\ ^2A] = \begin{bmatrix} A_{1b} & A_1 \\ A_{2b} & A_{2ab} \end{bmatrix} . \tag{3}$$

W tablicach rzędów pochodnych liczb strukturalnych ^2A i $^2A_{b2}$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i \quad P_{b_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

nie ma kolumn identycznych, a więc liczby strukturalne zupełne A i A_{b2} są równe

$$A = A_{1b}A_2 + A_1A_{2a} \quad i \quad A_{b_2} = A_{1b}A_{2b} + A_1A_{2ab} . \tag{5}$$

Wyznaczniki D i D_{b2} liczb strukturalnych zupełnych A i A_{b2} są zatem następujące

$$D = D_{1b}D_2 + D_1D_{2a} \quad i \quad D_{b_2} = D_{1b}D_{2b} + D_1D_{2ab} . \tag{6}$$

Dzieląc wyznaczniki D i D_{b2} przez iloczyn D_1D_2 otrzymuje się

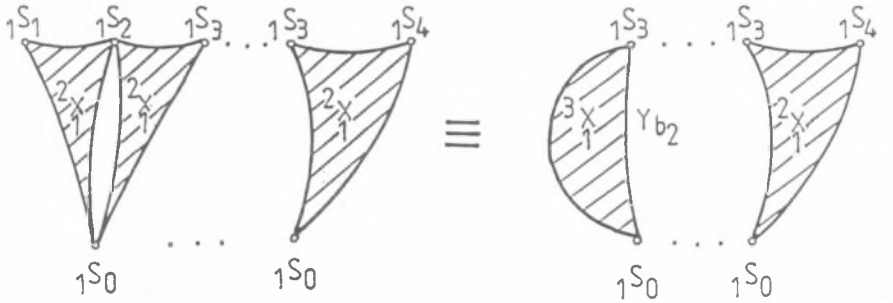
$$\begin{cases} \dfrac{D_{1b}}{D_1}\dfrac{D_2}{D_2} + \dfrac{D_1}{D_1}\dfrac{D_{2a}}{D_2} = Y_{1b} + Y_{2a} , \\ \dfrac{D_{1b}}{D_1}\dfrac{D_{2b}}{D_2} + \dfrac{D_1}{D_1}\dfrac{D_{2ab}}{D_{2b}}\dfrac{D_{2b}}{D_2} = Y_{1b}Y_{2b} + Y_{2ab}Y_{2b} . \end{cases} \tag{7}$$

Podatność dynamiczna w przekroju pręta, w którego osi podłużnej odmierza się uogólnioną współrzędną ${}_1s_3$, wynosi ostatecznie

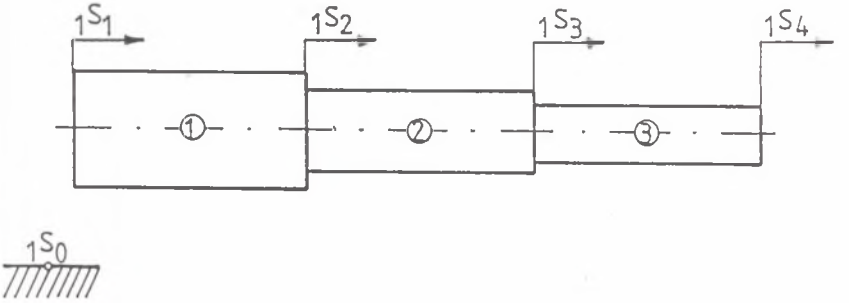
$$Y_{b_2} = \frac{Y_{2b}\,(Y_{1b}+Y_{2ab})}{Y_{1b}+Y_{2a}} \tag{8}$$

Zależność (8) opisuje podatność dynamiczną dwuelementowego układu prętowego, obliczoną na prawym końcu układu prętowego.

Aby wyznaczyć podatność dynamiczną układu trójelementowego (rys. 3), zastosowano agregację bloków grafu blokowego [1]. Agregacja w rozważanym przypadku polega na zastąpieniu dwóch bloków grafu blokowego drugiej kategorii z rys. 2 jednym blokiem trzeciej kategorii. W dalszym ciągu do tego bloku dołącza się hipergraf drugiej kategorii, który jest modelem trzeciego pręta. Rozważania te zilustrowano na rys. 4.
A zatem po agregacji otrzymuje się hipergraf i jego szkielet (rys. 5). Podatność dynamiczną, określoną zależnością (8), przyporządkowano krawędzi b_2 .



Rys 3. Graficzne przedstawienie metody agregacji w ujęciu hipergrafów
Fig. 3. Graphical representation of an agregation method represented by hypergraph



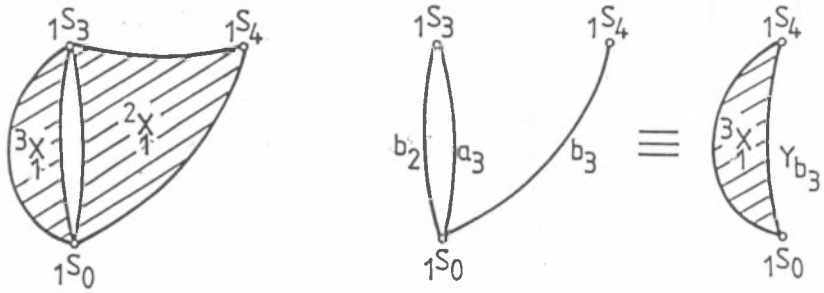
Rys. 4. Model trójelementowego swobodnego drgającego skrętnie układu prętowego o strukturze kaskadowej
Fig. 4. The model of a torsionally vibrating three-bar system with cascade structure

Liczba strukturalna dopełniająca szkieletu (rys. 5) $A^d{}_0$ jest równa

$$A_0^d = [b_2 a_3] \ . \tag{9}$$

tak więc liczba strukturalna ^2A hipergrafu (rys. 5) wynosi

$$^2A = [A_0^d]\downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_1 \\ A_{2b} & A_2 \\ A_3 & A_{3a} \end{bmatrix} \ . \tag{10}$$



Rys. 5. Obciążony hipergraf układu z rys. 4 i jego szkielet
Fig. 5. The weighted hypergraph of the system from fig. 4 and its skeleton

Aby wyznaczyć podatność dynamiczną w przekroju pręta, w którego osi podłużnej odmierza się uogólnioną współrzędną $_1s_4$, należy jeszcze wyliczyć pochodną algebraiczną $^2A_{b2}$ liczby strukturalnej ^2A jako

$$^2A_{b_3} = [b_2]\downarrow [\ ^2A] = \begin{bmatrix} A_1 & A_1 \\ A_{2b} & A_2 \\ A_{3b} & A_{3ab} \end{bmatrix} \ . \tag{11}$$

W tablicach rzędów pochodnych liczb strukturalnych ^2A i $^2A_{b3}$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i \quad P_{b_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

nie ma kolumn identycznych, a więc liczby strukturalne zupełne A i A_{b3} są równe

$$A = A_1(A_{2b}A_3 + A_2A_{3a}) \quad i \quad A_{b_3} = A_1(A_{2b}A_{3b} + A_2A_{3ab}) \ . \tag{13}$$

Wyznaczniki D i D_{b3} liczb strukturalnych zupełnych A i A_{b3} są zatem następujące

$$D = D_1(D_{2b}D_3 + D_2D_{3a}) \quad i \quad D_{b_3} = D_1(D_{2b}D_{3b} + D_2D_{3ab}) \ . \tag{14}$$

Dzieląc wyznaczniki D i D_{b3} przez iloczyn $D_1D_2D_3$ otrzymuje się

$$\begin{cases} \frac{D_1}{D_1}\left(\frac{D_{2b}}{D_2}\frac{D_3}{D_3}+\frac{D_2}{D_2}\frac{D_{3a}}{D_3}\right) = Y_{2b}+Y_{3a} \\ \frac{D_1}{D_1}\left(\frac{D_{2b}}{D_2}\frac{D_{3b}}{D_3}+\frac{D_2}{D_1}\frac{D_{3ab}}{D_{3b}}\frac{D_{3b}}{D_3}\right) = Y_{2b}Y_{3b}+Y_{3ab}Y_{3b} \end{cases} \tag{15}$$

Podatność dynamiczna w przekroju pręta, w którego osi podłużnej odmierza się uogólnioną współrzędną ${}_1s_4$, wynosi ostatecznie

$$Y_{b_3} = \frac{Y_{3b}(Y_{2b}+Y_{2ab})}{Y_{2b}+Y_{3a}} . \tag{16}$$

We wzorze (16) występuje wyrażenie Y_{2b}, które jest podatnością układu dwuelementowego. Podatność tę określono zależnością (8) i przyporządkowano krawędzi szkieletu b_2 bloku trzeciej kategorii (rys.5), a więc $Y_{2b}=Y_{b2}$.
Wobec tego zależność (16) należy zapisać w postaci

$$Y_{b_3} = \frac{Y_{3b}(Y_{b_2}+Y_{2ab})}{Y_{b_2}+Y_{3a}} . \tag{17}$$

Postępując podobnie jak w przypadku układu dwuelementowego i trójelementowego, podatność układu czteroprętowego jest następująca

$$Y_{b_4} = \frac{Y_{4b}(Y_{b_3}+Y_{3ab})}{Y_{b_3}+Y_{4a}} . \tag{18}$$

oraz (i + 1) - elementowego wynosi

$$Y_{b_{(i+1)}} = \frac{Y_{(i+1)b}\left(Y_{b_i}+Y_{(i+1)ab}\right)}{Y_{b_i}+Y_{(i+1)a}} , \quad (i=1,2,\ldots) . \tag{19}$$

Podatność (18) jest rekurencyjną zależnością umożliwiającą jej oprogramawanie. Stanowi ona jedną z możliwości pakietu komputerowego[1], wyznaczającego podatności dynamiczne złożonych drgających wzdłużnie lub skrętnie układów prętowych o odcinkowo stałym przekroju.

[1] Pakiet ten znajduje się w Katedrze Mechaniki Robotów i Maszyn Roboczych Ciężkich Wydziału Mechanicznego Technologicznego Politechniki Śląskiej.

LITERATURA

[1] Bellert S., Woźniacki H.: Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych. WNT, Warszawa 1968.
[2] Biderman V.L.: Prikładnaja teorija mechaniczeskich kolebanij. Vysszaja szkoła, Moskwa 1972.
[3] Bishop R.E.D., Gladwell G.M.L., Michaelson S.: Macierzowa analiza drgań. WNT, Warszawa 1972.
[4] Bishop R.E.D., Johnson D.G.: The Mechanics of Vibration. Cambridge University Press, 1960.
[6] Buchacz A.: Synteza drgających układów prętowych w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. ZN Pol. Śląskiej, Mechanika, z.104, Gliwice 1991.
[7] Cannon R.H.,Jr.: Dynamika układów fizycznych. WNT, Warszawa 1973.
[8] Praca zbiorowa. Dynamika maszyn. PAN, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław 1974.
[9] Dżygadło Z., Kaliski S., Solarz L., Włodarczyk E.: Drgania i fale. PWN, Warszawa 1966.
[10] Giergiel J.: Identyfikacja układów mechanicznych. Zb. ref. XII Sympozjum - Drgania w układach fizycznych. PTMTS, Poznań 1986, ss. 21-34.
[11] Gladwell G.M.L, Bishop R.E.D.: Interior Receptances of Beams. J. Mech. Engng Sci., 2, 1, (1960), p.1-15.
[12] Kaliski S.,red.: Drgania i fale - mechanika techniczna. T.III, PWN, Warszawa 1986.
[14] Rakowski G.: Zastosowanie macierzy do analizy statycznej i dynamicznej prętów prostych. Arkady, Warszawa 1968.
[15] Solecki R., Szymkiewicz J.: Układy prętowe i powierzchniowe. Obliczenia dynamiczne. Arkady, Warszawa 1964.
[18] Tse F.S., Morse I.E., Hinkle R.T.: Mechaniczeskije kolebanija. Maszinostrojenije, Moskwa 1966.
[19] Wibracii w technikì -sprawocznik w 6 tomach. Maszinostrojenije, Moskwa 1981.
[21] Wojnarowski J.: Grafy i liczby strukturalne jako modele układów mechanicznych. PTMTS, Gliwice 1977.
[22] Wojnarowski J.: Zastosowanie grafów w analizia drgań układów mechanicznych. PWN, Warszawa- Wrocław 1981.
[23] Wojnarowski J., Buchacz A.: Modelowanie układów prętowych za pomocą grafów i liczb strukturalnych. Arch. Inż. Ląd.,4, XXV, (1979), ss.705:727.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jerzy Maryniak
Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1993 r.

Abstract

The presented work concerns building and researching of complex continuous mechanical systems with the aid of graphs and structural numbers. Model of mechanical system, described in this way, is treated as the basis for proceeding determination of dynamic characteristics (with special regard to the determination of dynamical flexibility).

In spite of the fact that problems of this kind are common in dynamics of vibrating mechanical systems, applying graphs and structural numbers in their solution allows to strike some new hints and helps to meet modern methods of algebraical analysis. It may be helpful in developing further generalisation in the research of vibrating, complex mechanical systems, too.

Yet the most important feature of this mathematical interpretation is, that applying a hypergraph aggregation enables us to generate in a simple way a recurrent formula of dynamical flexibility for any regular structures (like a cascade structure of a bar). This work is dealing with this particular case. The character of presented description and algebraisation of it, carried out with the method of structural numbers (in particular applying the determinant function designated on structural numbers), allows to analyse complex, continuous mechanical systems without any need to limit number and variety of their elements while working with with electronical technics of calculation.

Pracę wykonano w ramach PBU-638/RMT-7/92