

Andrzej Antoni CZAJKOWSKI
Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego
Krzysztof WIERZCHOLSKI
Katedra Techniki Ciepłej Politechniki Szczecińskiej

ANALIZA NUMERYCZNA WARTOŚCI NAPRĘŻEŃ STYCZNYCH
WYSTĘPUJĄCYCH W PRZEPŁYWIE PSEUDOPLASTYCZNEJ CIECZY
NIENEWTONOWSKIEJ W MIESZALNIKU WALCOWYM

Streszczenie. W pracy przedstawiono analizę numeryczną wartości naprężeń stycznych występujących w cieczy nienewtonowskiej podczas procesu jej mieszania w mieszalniku walcowym dla przyjętych różnych wartości indeksu przepływu cieczy. Z badań wynika, iż spadek wartości indeksu przepływu (wzrost zanieczyszczeń w cieczy) powoduje wzrost wartości naprężeń stycznych.

NUMERICAL ANALYSIS OF THE TANGENTIAL STRESSES VALUES
OCCURRING IN THE PSEUDOPLASTICAL NON-NEWTONIAN FLUID
FLOW IN THE CYLINDRICAL MIXER

Summary. The numerical analysis of the tangential stresses values occurring in the non-Newtonian fluid flow in the cylindrical mixer dependent on the flow index has been presented in the paper. The decrease of the flow index value (i.e. the increase of the fluid impurities) means the increase of the tangential stresses values.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗНАЧЕНИЙ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ
ВЫСТУПАЮЩИХ В ПСЕВДОПЛАСТИЧНОЙ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ
ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ МИКСЕРЕ

Резюме. В работе представлен численный анализ значений касательных напряжений выступающих в неньютоновской жидкости в цилиндрическом миксере для различных значений показателя неньютоновского поведения. Уменьшение показателя неньютоновского поведения (то есть, возрастание примеси в жидкости) означает возрастание значений касательных напряжений.

1. WSTĘP

W pracy analizuje się stacjonarny przepływ nienewtonowskiej izotermicznej cieczy, który wywołany jest ruchem cylindrycznego mieszadła w mieszalniku walcowym. Przyjmuje się laminarny przepływ cieczy nieściśliwej o stałej gęstości i lepkości dynamicznej cieczy. W równaniu energii pomija się siły masowe i dysypację energii. Wykorzystuje się rozkład wartości prędkości cieczy, który ma zasadniczy wpływ na wartości naprężeń stycznych występujących na głębokości mieszanej cieczy. Należy zauważyć, że ciecze podczas mieszania charakteryzują się różnym stopniem występowania zanieczyszczeń, co ma wpływ na zmienną wartość lepkości pozornej cieczy. Wraz ze wzrostem zanieczyszczeń ciecz uzyskuje nienewtonowskie własności. Indeks przepływu n jest pewną umowną miarą stosowaną przez Reintera-Rivlina do określania stopnia odmienności cieczy newtonowskiej od nienewtonowskiej. Dla $n=1$ mamy ciecz newtonowską. Ciecz nienewtonowska o własnościach pseudoplastycznych ma indeks przepływu n w przedziale $(0, 1)$. Celem pracy jest ustalenie wpływu pseudoplastycznych własności cieczy na wartości naprężeń stycznych występujących w cieczy podczas procesu jej mieszania w mieszalniku walcowym.

2. ROZWIĄZANIE RÓWNIANIA RUCHU CIECZY

Proces mieszania w dowolnym układzie współrzędnych cylindrycznych (v, r, z) jest opisany trzema równaniami pędu (patrz Appendix), które skrótkowo zapisuje się wzorem [2]:

$$\rho \frac{dv}{dt} = \text{Div} S, \quad (1)$$

gdzie ρ oznacza stałą gęstość cieczy w $[\text{kg}/\text{m}^3]$, v - wektor prędkości cieczy w $[\text{m}/\text{s}]$, S - tensor naprężeń w $[\text{Pa}]$. Związki konstytutywne mają następującą postać [2]:

$$S = -pU + 2\mu_p T_d, \quad (2)$$

gdzie p oznacza zmienne ciśnienie w $[\text{Pa}]$, U - tensor jednostkowy, T - tensor prędkości deformacji w $[\text{1}/\text{s}]$.

Lepkość dynamiczną cieczy μ_p w [Pa s] określa się wzorem [3]:

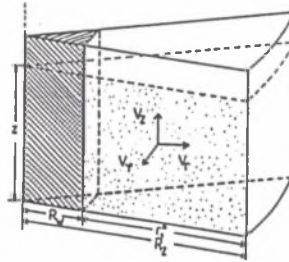
$$\mu_p(r, n) = m_o(n) \left| \frac{dV_\varphi}{dr} - \frac{V_\varphi}{r} \right|^{n-1}, \quad (3)$$

gdzie m_o to współczynnik konsystencji cieczy w [Nsⁿ/m], V_φ - obwodowa współrzędna wektora prędkości cieczy \mathbf{v} w [m/s], r - współrzędna promieniowa w [m], n - indeks przepływu cieczy z przedziału $\langle 0.5; 1 \rangle$. Równanie ciągłości ma następującą postać [2]:

$$\text{div} \mathbf{v} = 0. \quad (4)$$

Proces mieszania odbywa się w mieszalniku walcowym (rys.1). Symbole V_φ, V_r, V_z to współrzędne wektora prędkości cieczy \mathbf{v} po kierunku obwodowym, promieniowym i głębokości mieszalnika. Ponieważ ruch cieczy wywołany jest wyłącznie w kierunku obwodowym przez ruch wałka mieszającego, a ciśnienie jest zmienne, stąd przyjmuje się następujące założenia upraszczające [2]:

$$V_\varphi = V_\varphi(r), \quad V_r(r) = 0, \quad V_z(z) = 0, \quad p = p(r) \quad (5)$$



Rys.1. Przekrój mieszalnika z cylindrycznym wałkiem mieszającym

Fig.1. Intersection of the mixer with the cylindrical stirrer

dla $R_w \leq r \leq R$; R_w, R_z - to długości promieni wałka mieszającego i mieszalnika [m].

Wprowadza się wielkości bezwymiarowe [2]:

$$r_1 = \frac{r}{R_w}, \quad \mu_{p1} = \frac{\mu_p}{\mu_o}, \quad V_1 = \frac{V_\varphi}{\omega R_w}, \quad p = p_a + p_o p_1, \quad p_o = \rho \omega^2 R_w^2 \quad (6)$$

gdzie μ_p, μ_o, p_a to lepkość dynamiczna cieczy, charakterystyczny współczynnik lepkości dynamicznej w [Pa s] i ciśnienie atmosferyczne w [Pa] oraz p_o - charakterystyczny

wektora prędkości (stosując znane związki geometryczne). Po wykorzystaniu założeń (3), (5) i (6) w równaniach (1) uzyskuje się następujący układ [2]:

$$\mu_{p_1} \frac{d^2 V_1}{dr_1^2} + \frac{\partial \mu_{p_1}}{\partial r_1} \frac{dV_1}{dr_1} + \frac{\mu_{p_1}}{r_1} \frac{dV_1}{dr_1} - \frac{\partial \mu_{p_1}}{\partial r_1} V_1 - \frac{\mu_{p_1}}{r_1^2} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{V_1^2}{r_1} = \frac{dp_1}{dr_1} \quad (7a)$$

dla $1 \leq r \leq D$, $D \equiv R_z/R_w$, $1 < D < +\infty$; gdzie $\mu_{p_1} = \mu_{p_1}(r_1, n)$, a $V_1 = V_1(r_1)$ jest niewiadomą bezwymiarową funkcją prędkości. Zakłada się, że prędkość cieczy na wałku jest równa prędkości wałka, a prędkość cieczy na ścianie mieszalnika jest równa zero. Stąd dla równania (7) przyjmuje się następujące warunki brzegowe [2]:

$$V_1(r_1 = 1) = 1, \quad V_1(r_1 = D) = 0 \quad (8)$$

Rozwiązanie równania (6) zakłada się w postaci szeregu $\{[2]\}$:

$$V_1(r_1) = V_{10}(r_1) + \frac{n-1}{2} V_{11}(r_1) + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 V_{12}(r_1) + 0 \left(\frac{n-1}{2}\right)^3. \quad (9)$$

Metodą współczynników nieoznaczonych wyznaczono funkcje [2]:

$$V_{10}(r_1) = \frac{D}{D^2-1} \left(\frac{D}{r_1} - \frac{r_1}{D} \right), \quad (10)$$

$$V_{11}(r_1) = \frac{4D^2}{D^2-1} \frac{1}{r_1} \left(\ln(r_1) - \frac{r_1^2-1}{D^2-1} \ln(D) \right), \quad (11)$$

$$V_{12}(r_1) = 4 \left(\frac{\ln D}{D^2-1} - \frac{1}{2} \right) V_{11}(r_1) + \frac{8D^2}{D^2-1} \frac{1}{r_1} \left(\ln^2 r_1 - \frac{r_1^2-1}{D^2-1} \ln^2 D \right). \quad (12)$$

3. NAPRĘŻENIA STYCZNE WYSTĘPUJĄCE W CIECZY

Wartości naprężeń stycznych t w [Pa] na głębokości przestrzeni mieszania dla indeksu przepływu $0.5 \leq n \leq 1$ mają postać [1,2]:

$$\tau(r) = -\mu_p(r, n) r \frac{d}{dr} \left(\frac{V_\varphi}{r} \right) \quad (13)$$

dla $R_w \leq r \leq R_z$, $\mu_p = \mu_0 \mu_{p1}$, gdzie lepkość μ_p przedstawia wzór (3).

Po przyjęciu założeń (6) we wzorach (3)&(13) wartości naprężeń stycznych na głębokości przestrzeni mieszania mają postać [3]:

$$\tau(r_1) = m_o(n) \omega_n \left| \frac{V_1}{r_1} - \frac{dV_1}{dr_1} \right|^{n-1} \left(\frac{V_1}{r_1} - \frac{dV_1}{dr_1} \right) \quad (14)$$

dla $1 \leq r_1 \leq D$, $0.5 \leq n \leq 1$. Po wprowadzeniu wzoru funkcji prędkości (9) do formuły (14) wartości naprężeń stycznych τ mają postać :

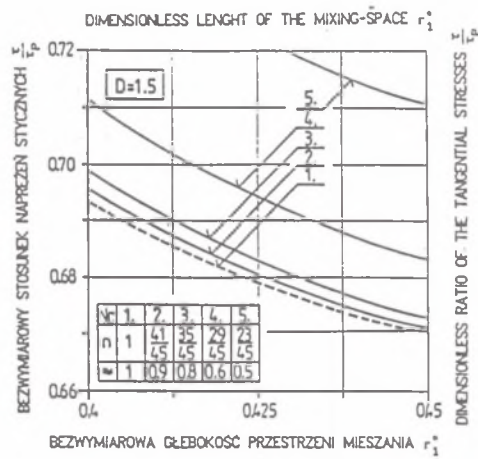
$$\tau(r_1) = m_o(n) \omega_n |W(r_1)|^{n-1} (W(r_1)) , \quad (15)$$

$$W(r_1) = \frac{P_1}{r_1^2} \{ 1 + 2(n-1)P_2(\ln r_1 + P_2) + 2(n-1)^2(\ln^2 r_1 - \ln r_1 + P_3) \} \quad (15a)$$

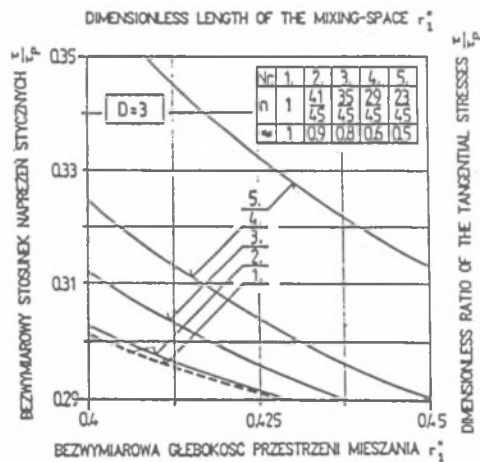
$$P_1 = \frac{2D^2}{D^2-1} , \quad P_2 = \frac{\ln D}{D^2-1} - \frac{1}{2} , \quad P_3 = \frac{\ln D}{D^2-1} . \quad (15b)$$

Dla $r_1 \equiv 1$, tzn. dla wartości naprężeń stycznych τ_p występujących na powierzchni wałka mieszającego, wzór (15) uzyskuje postać :

$$p = \tau(r_1) = m_o(n) \omega_n |W(r_1=1)|^{n-1} (W(r_1=1)) . \quad (16)$$



Rys.2. Rozkłady wartości naprężeń stycznych t/t_0 występujących w cieczy nienewtonowskiej dla indeksu przepływu cieczy $n = 41/45, 35/45, 29/45, 23/45$ oraz parametrów $D=1.5, f=5$
 Fig.2. Distributions of the tangential stresses values t/t_0 occurring in the non-Newtonian fluid for the flow index $n=41/45, 35/45, 29/45, 23/45$ & for the parameters $D=1.5, f=5$



Rys.3. Rozkłady wartości naprężeń stycznych t/t_0 występujących w cieczy nienewtonowskiej dla indeksu przepływu cieczy $n = 41/45, 35/45, 29/45$ i $23/45$ oraz parametrów $D=3, f=5$
 Fig.3. Distributions of the tangential stresses values t/t_0 occurring in the non-Newtonian fluid for the flow index $n=41/45, 35/45, 29/45, 23/45$ & for the parameters $D=3$ & $f=5$

4. ANALIZA NUMERYCZNA NAPRĘŻEŃ STYCZNYCH

Celem dokonania porównań wprowadza się stosunek naprężeń [1]:

$$\frac{\tau}{\tau_p} = \frac{\tau(r_1)}{\tau_p}, \quad r_1 = (D-1)r_1^* + 1, \quad 0 \leq r_1^* \leq 1, \quad (17)$$

gdzie $\tau = \tau(r_1)$ oraz $\tau_p \equiv \tau(r_1=1)$ są określone wzorami (15)&(16).

W przypadku gdy $n=1$ (tzn. dla cieczy newtonowskiej), wzór (17) otrzymuje znaną z literatury postać [1 s.890]:

$$\frac{\tau(r_1)}{\tau_p} = \frac{1}{r_1^2}. \quad (18)$$

Analizę wzoru (17) wykonano dla $n=1$, 41/45, 35/45, 29/45, 23/45 i dla $D=1.5$; 3 na IBM PC/AT 80386/40MHz w TP v.7.0 (rys.2 & 3).

5. WNIOSKI

Wniosek 1. Wraz ze spadkiem indeksu przepływu cieczy $1 > n \geq 0.5$ (tj. wraz ze wzrostem zawartości zanieczyszczeń w cieczy) rosną wartości naprężeń, stycznych występujących w cieczy nienewtonowskiej w porównaniu z wartościami naprężeń, jakie uzyskuje się dla przypadku cieczy newtonowskiej (tzn. bez zanieczyszczeń).

Wniosek 2. Dla małych mieszalników ($1.25 \leq D \leq 3$) i dużych zanieczyszczeń w cieczy ($0.5 < n < 0.6$) wartości naprężeń są większe w porównaniu z wartościami naprężeń, jakie występują dla mieszalników o dużych średnicach względnych ($3 < D \leq 20$) i dużych zanieczyszczeniach ($0.5 \leq n \leq 0.6$), (rys.2 & 3).

Zaznacza się, że analiza wartości naprężeń stycznych występujących w cieczy nienewtonowskiej podczas procesu jej mieszania nie jest celem ostatecznym. Jednak znajomość wartości naprężeń pozwala wyznaczyć inne parametry pracy mieszalnika. Jednym z istotnych parametrów jest zapotrzebowanie na moc mieszalnika.

LITERATURA

- [1] Brauer H.: Grundlagen der Einphasen und Mehrphasenströmungen Verlag Sauerländer, Aarau 1971, s.888-890.

- [2] Czajkowski A.A., Wiercholski K.: Analytical Solutions of Some Ordinary Non-Linear Differential Equation of the Second Order Describing the non-Newtonian Fluid Flow in the Mixing-Process, Proceedings of "The 7-th International Conference "System-Modelling-Control-7", Zakopane May 17-21, 1993, Vol.1, pp.108-113.
- [3] Wiercholski K.: Elementy mechaniki płynów, Teoria i zadania, część I, Politechnika Szczecińska, 1993, s.217-226.

APPENDIX

Poruszany problem opisany jest we współrzędnych cylindrycznych (φ, r, z) trzema równaniami pędu, które dla stacjonarnego laminarnego przepływu płynu nieściśliwego mają następującą postać:

$$\rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\varphi V_\varphi}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} (2\mu_p \theta_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (2\mu_p \theta_{r\varphi}) + \frac{\partial}{\partial z} (2\mu_p \theta_{rz}) + \frac{2}{r} 2\mu_p (\theta_{rr} - \theta_{\varphi\varphi}), \quad (\text{A})$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} - \frac{V_r V_\varphi}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial r} (2\mu_p \theta_{r\varphi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (2\mu_p \theta_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial}{\partial z} (2\mu_p \theta_{\varphi z}) + \frac{2}{r} 2\mu_p (\theta_{r\varphi}), \quad (\text{B})$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} (2\mu_p \theta_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (2\mu_p \theta_{z\varphi}) + \frac{\partial}{\partial z} (2\mu_p \theta_{zz}) + \frac{1}{r} (2\mu_p \theta_{rz}), \quad (\text{C})$$

gdzie współrzędne tensora prędkości deformacji są następujące:

$$\Theta_{rr} = \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad \Theta_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r}{r}, \quad \Theta_{zz} = \frac{\partial V_z}{\partial z}, \quad (\text{D})$$

$$\Theta_{r\varphi} = \Theta_{\varphi r} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} \right), \quad (\text{E})$$

$$\Theta_{rz} = \Theta_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right), \quad \Theta_{\varphi z} = \Theta_{z\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} \right). \quad (F)$$

Ponadto równanie ciągłości dla cieczy nieściśliwej ma postać:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \quad (G)$$

Po wykorzystaniu założeń (5) & (6) i zależności (D), (E) & (F) w równaniach (A),(B),(C) & (G) otrzymuje się równania (7)-(7a).

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Ryszard Gryboś

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1993 r.

Abstract

The analysis of the tangential stresses occurring in the non-Newtonian fluid during the mixing process in the cylindrical mixer with the cylindrical stirrer has been shown in the paper.

The steady and isothermic motion of fluid are presented in the considerations. The laminar motion of incompressible fluid with the constant density and fluid dynamic viscosity are taken into account. The pressure depends on the radial component r . The fluid motion is generated by the angular motion of the cylindrical stirrer (Fig.1). To form the mathematical model of that process the body forces and energy dissipation were omitted in the energy equation. The presented problem is considered in the cylindrical coordinates (φ, r, z) . The symbols V_φ , V_r , V_z mean the dimensional components of the velocity vector in the circumferential, radial and vertical direction (Formula 5). In the modified equation of motion (Formula 7) which describes the mixing process was used the apparent dynamic viscosity (Formula 3) for the non-Newtonian fluid by using the assumptions (6). The dimensionless functions of the tangential stresses τ (Formulae 15 & 16) were defined by previously obtained dimensionless velocity functions V_1 (Formulae 9, 10, 11&12) [2]. During the fluid-mixing are often observed the different percentage of the fluid impurities. This fact means that the tangential stresses are dependent on the flow index n . From the presented considerations implies that the decrease of the flow index ($1 > n \geq 0.5$) means the increase of the tangential stresses values occurring in the

non-Newtonian fluid as compared with the tangential stresses values which take place in the Newtonian fluid (Fig.2&3). The maximum values of the tangential stresses are obtained for the little mixers ($1.25 \leq D \leq 3$) and the big fluid impurities ($0.5 \leq n \leq 0.6$) as compared with the values of the tangential stresses occurring in the big mixers ($3 < D \leq 20$) and a big percentage of the fluid impurities ($0.5 \leq n \leq 0.6$) (Fig.2&3) [1]. The analysis of the tangential stresses is not an aim itself. Knowing the values of the tangential stresses we can define the another mixer's parameter as a power demand.