ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994

Seria: MECHANIKA z. 116 Nr kol. 1231

Andrzej Antoni CZAJKOWSKI
Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego
Krzysztof WIERZCHOLSKI
Katedra Techniki Cieplnej Politechniki Szczecińskiej

ANALIZA NUMERYCZNA WARTOŚCI ZAPOTRZEBOWANIA NA MOC MIESZALNIKA WALCOWEGO W PROCESIE MIESZANIA PSEUDOPOLASTYCZNEJ CIECZY NIENEWTONOWSKIEJ

Streszczenie. W pracy przedstawiono analizę numeryczną bezwymiarowych wartości zapotrzebowania na moc mieszalnika walcowego w procesie mieszania cieczy nienewtonowskiej dla przyjętych różnych wartości indeksu przepływu cieczy. Z badań wynika, iż spadek wartości indeksu przepływu cieczy (tzn. wzrost zanieczyszczeń w cieczy) powoduje spadek wartości zapotrzebowania na moc mieszalnika walcowego.

NUMERICAL ANALYSIS OF THE CYLINDRICAL MIXER POWER DEMAND VALUES IN THE MIXING-PROCESS OF THE PSEUDOPLASTICAL NON-NEWTONIAN FLUID

Summary. The numerical analysis of the dimensionless values of the cylindrical mixer power demand in the mixing-process of the non-Newtonian fluid for the different values of the flow index has been presented in the paper. The decrease of the flow index value (i.e., the increase of the fluid impurities) means the decrease of the mixer power demand values.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗНАЧЕНИЙ МОЩНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО МИКСЕРА В ПРОЦЕССЕ СМЕШАНИЯ ПСЕВДОПЛАСТИЧНОЙ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

Резюме. В работе представлен численный анализ безразмерных значений мощности цилиндрического миксера в процессе смешания неньютоновской жидкости для различных значений показателя неньютоновского поведения. Уменшение показателя неньютоновского поведения (то есть, возврастание примесии в жидкости) озхачает уменшение значений мощности цилиндрического миксера.

1. WSTĘP

W pracy analizuje się stacjonarny przepływ nienewtonowskiej izotermicznej cieczy, który wywołany jest ruchem cylindrycznego mieszadła w mieszalniku walcowym. Przyjmuje się laminarny przepływ cieczy nieściśliwej o stałej gęstości i lepkości dynamicznej cieczy. W równaniu energii pomija się siły masowe i dysypację energii. Do wyznaczenia wartości zagłębienia leja cieczy powstałego w trakcie procesu mieszania wyznacza się rozkład wartości prędkości cieczy oraz wartości naprężeń stycznych występujących na wałku mieszającym. Pozwala to sformułować wzór na wartości zapotrzebowania na moc mieszalnika walcowego.

Ciecze podczas mieszania charakteryzują się różnym stopniem występowania zanieczyszczeń, co ma wpływ na zmienną wartość lepkości pozornej cieczy. Wraz ze wzrostem zanieczyszczeń ciecz wykazuje nienewtonowskie własności. Odmienność cieczy nienewtonowskiej od newtonowskiej wyraża indeks przepływu n. Indeks przepływu z przedziału $\langle 0.5;1)$ charakteryzuje ciecz nienewtonowską o własnościach pseudoplastycznych. Celem pracy jest ustalenie wpływu pseudoplastycznych własności cieczy na bezwymiarowe wartości zapotrzebowania na moc mieszalnika walcowego.

2. MODEL MATEMATYCZNY RUCHU CIECZY

Proces mieszania w układzie współrzędnych walcowych (r,φ,z) jest opisany trzema równaniami pędu zapisanymi wzorem [2]:

$$\rho \frac{dv}{dt} = Div \begin{Vmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\varphi} & \tau_{rz} \\ \tau_{\varphi r} & \tau_{\varphi\varphi} & \tau_{\varphi z} \\ \tau_{zr} & \tau_{\varphi z} & \tau_{zz} \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

gdzie ρ - to stała gęstość cieczy w [kg/m^3], v - wektor prędkości cieczy w [m/s], τ_{ij} - to współrzędne tensora naprężeń w [Pa] dla i, j = r, ρ, z; ponadto r, ρ, z oznaczają odpowiednio współrzędne promieniową, obwodową i po głębokości mieszalnika w [m]. Związki konstytutywne uzupełnione zależnościami geometrycznymi przyjmują następującą postać [3]:

$$\tau_{rr} = -p + 2\mu_p \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad \tau_{zz} = -p + 2\mu_p \frac{\partial V_z}{\partial z}, \tag{2}$$

$$\tau_{\varphi\varphi} = -p + 2\mu_p\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_\varphi}{d\varphi} + \frac{V_r}{r}\right), \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} = \mu_p\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r}\right), \tag{2a}$$

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = \mu_p\left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z}\right), \quad \tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi} = \mu_p\left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\varphi}\right), \tag{2b}$$

gdzie p to zmienne ciśnienie w [Pa], V_r, V_φ, V_z - to współrzędne wektora prędkości cieczy v w [m/s] po kierunku promieniowym, obwodowym i głębokości mieszalnika, μ_p - to lepkość pozorna cieczy w [Pa·s], którą definiuje się następującym wzorem [2],[3]:

$$\mu_p(r,n) = 2^{n-1} m_0(n) \left|0.5\tau_{ks}\tau_{ks}\right|^{\frac{n-1}{2}} \quad dla\ k,s = \varphi, r, z\ ; \tag{3}$$

gdzie m_0 - to współczynnik konsystencji cieczy w [Ns^n/m^2]. Równania (1) uzupełnia się równaniem ciągłości o postaci [2]:

$$div\ v = 0\ . \tag{4}$$

Proces mieszania odbywa się w mieszalniku walcowym (rys.1A). Ponieważ ruch cieczy wywołany jest wyłącznie po kierunku obwodowym przez ruch wałka mieszającego, a ciśnienie jest zmienne, stąd przyjmuje się następujące założenia upraszczające [2]:

$$V_\varphi = V_\varphi(r)\ , \quad V_r(r) = 0\ , \quad V_z(r) = 0\ , \quad p = p(r) \tag{5}$$

gdzie $R_w \le r \le R_z$; a R_w, R_z - to długości promieni wałka mieszającego i mieszalnika w [m]. Wprowadza się wielkości bezwymiarowe [2]:

$$r_1 = \frac{r}{R_w}\ , \quad \mu_{p_1} = \frac{\mu_p}{\mu_0}\ , \quad V_1 = \frac{V_\varphi}{\omega R_w}\ , \quad p = p_a + p_0 p_1\ ; \quad p_0 = \rho\,\omega^2 R_w^2 \tag{6}$$

gdzie μ_{p1}, V_1, r_1, p_1 to bezwymiarowe wartości lepkości pozornej cieczy, prędkości obwodowej, współrzędnej promieniowej i ciśnienia; μ_0, p_0, p_a - charakterystyczne wartości lepkości pozornej cieczy w [Pa·s], współczynnika przyrostu ciśnienia i ciśnienia atmosferycznego w [Pa], ω - prędkość kątowa wałka mieszającego w [1/s]. Po wstawieniu założeń (2)-(6) do wzoru (1) uzyskuje się następujący układ równań [2]:

$$\frac{d^2V_1}{dr_1^2} + \left(\frac{dV_1}{dr_1} - \frac{V_1}{r_1}\right)\frac{d}{dr_1}\left[\ln(r_1\cdot\mu_{p_1})\right] = 0 \tag{7}$$

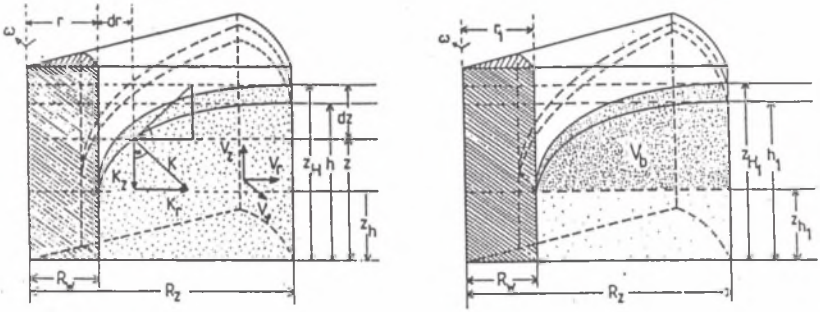
$$\frac{V_1^2}{r_1} = \frac{dp_1}{dr_1} \tag{7a}$$

dla $1 \le r \le D$, $D = R_w/R_z$, $1 < D < +\infty$, gdzie $V_1 = V_1(r_1)$ jest niewiadomą bezwymiarową funkcją prędkości. Zakłada się, że prędkość cieczy na wałku jest równa prędkości wałka, a prędkość cieczy na ściance mieszalnika jest równa zero. Stąd dla równania (7) przyjmuje się warunki brzegowe w następującej postaci [2]:

$$V_1(r_1 = 1) = 1 \ , \quad V_1(r_1 = D) = 0 \tag{8}$$

Rozwiązanie równania (7) zakłada się w postaci szeregu [2]:

$$V_1(r_1) = V_{10}(r_1) + \frac{n-1}{2} V_{11}(r_1) + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 V_{12}(r_1) + 0\left(\frac{n-1}{2}\right)^3 . \tag{9}$$



1A 1B

Rys.1. *Schemat mieszalnika z cylindrycznym wałkiem mieszającym*
Fig.1. *Cylindrical mixer with the cylindrical stirrer*

Metodą współczynników nieoznaczonych wyznaczono funkcje [2]:

$$V_{10}(r_1) = \frac{D}{D^2-1}\left(\frac{D}{r_1} - \frac{r_1}{D}\right) \le 1 \ , \tag{9a}$$

$$V_{11}(r_1) = \Theta(r_1, k=1) \ , \tag{9b}$$

$$V_{12}(r_1) = 4\left(\frac{\ln D}{D^2-1} - \frac{1}{2}\right)\Theta(r_1, k=1) + \Theta(r_1, k=2) \ , \tag{9c}$$

$$\Theta(r_1, k) = \frac{4kD^2}{D^2-1}\frac{1}{r_1}\left(\ln^k(r_1) - \frac{r_1^2-1}{D^2-1}\ln^k(D)\right), \quad k = 1,2 \ . \tag{9d}$$

3. NAPRĘŻENIA STYCZNE WYSTĘPUJĄCE W CIECZY PODCZAS MIESZANIA

Wartości naprężeń stycznych τ w [Pa] na głębokości przestrzeni mieszania dla indeksu przepływu $0.5 \le n \le 1$ są postaci [1],[3]:

$$\tau(r_1) = m_0(n)\,\omega^n \left| \frac{V_1}{r_1} - \frac{dV_1}{dr_1} \right|^{n-1} \left(\frac{V_1}{r_1} - \frac{dV_1}{dr_1} \right) \tag{10}$$

dla $1 \le r_1 \le D$; $0.5 \le n \le 1$. Po wprowadzeniu wzoru funkcji prędkości (9) do wyrażenia (10) wartości naprężeń stycznych τ mają postać:

$$\tau(r_1) = m_0(n)\,\omega^n \left| W(r_1) \right|^{n-1} \left(W(r_1) \right) \tag{11}$$

$$W(r_1) = \frac{\varrho_1}{r_1^2} \{ 1 + 2(n-1)\varrho_2(\ln r_1 + \varrho_2) + 2(n-1)^2(\ln^2 r_1 - \ln r_1 + \varrho_3) \} \tag{11a}$$

$$\varrho_1 = \frac{2D^2}{D^2-1}, \quad \varrho_2 = \frac{\ln D}{D^2-1} - \frac{1}{2}, \quad \varrho_2 = \frac{\ln D}{D^2-1}. \tag{11b}$$

Dla $r_1 \equiv 1$, tzn. dla wartości naprężeń stycznych τ_p występujących na powierzchni wałka mieszającego, wzór (11) uzyskuje postać:

$$\tau_p = \tau(r_1 = 1) = m_o(n)\,\omega^n \left| W_1 \right|^{n-1} \left(W_1 \right). \tag{12}$$

$$W_1 = W(r_1 = 1) = \varrho_1 \left[1 + 2(n-1)\varrho_2^2 + 2(n-1)^2 \varrho_3 \right]. \tag{12a}$$

4. GŁĘBOKOŚĆ LEJA CIECZY WYTWORZONEGO W PROCESIE MIESZANIA

Z obranych założeń (rys.1A) wynikają następujące związki [2]:

$$\frac{K_r}{K_z} = \frac{dz}{dr}, \quad K_r = \frac{m V_\varphi^2}{r}, \quad K_z = m \cdot g, \tag{13}$$

gdzie K_r, K_z to siły odśrodkowa i ciążenia w [N], g - przyśpieszenie ziemskie w [m/s^2], m - masa cieczy w [kg]. Zadaną głębokość leja cieczy z-z_h w [m] określa się następująco [1]:

$$z - z_h = \frac{\omega^2 R_w^2}{2g}(z_1 - z_{h_1}) , \tag{14}$$

gdzie z_1-z_h jest jej wartością bezwymiarową. Po wykorzystaniu założeń (6) i (14) we wzorze (13) uzyskuje się równanie [1]:

$$\frac{V_1^2}{r_1} dr_1 = \frac{1}{2} dz_1 . \tag{15}$$

Dla równania (15) przyjmuje się następujący warunek brzegowy:

$$z_1 = z_{h_1} \quad dla \quad r_1 = 1 . \tag{15a}$$

Po wstawieniu rozwiązania (9) do równania (15),wykonaniu całkowania oraz odpowiednich przekształceń, a także nałożeniu warunku brzegowego (15a) na uzyskane rozwiązanie ogólne otrzymuje się bezwymiarową zadaną głębokość leja cieczy w postaci [1]:

$$z_1 - z_{h_1} = 2\int_1^{r_1} \frac{V_1^2}{r_2} dr_2 \tag{16}$$

$$dla \quad 1 \le r_1 \le r_2 \le D ; \quad 1 < D < +\infty ; \quad z_{h_1} \le z_1 \le z_{H_1} .$$

5. ZAPOTRZEBOWANIE NA MOC JEDNOSTKOWĄ MIESZALNIKA WALCOWEGO

Objętość cieczy tworzącej lej określają wzory (rys.1B) [1]:

$$V_b = \pi(R_z^2 - R_w^2)(h - z_h) , \tag{17}$$

$$V_b = \int_0^{2\pi}\left[\int_{R_w}^{R_z}\left(\int_0^{z-z_h} dz\right) r\,dr\right] d\varphi = 2\pi\int_{R_w}^{R_z}(z - z_h)\,r\,dr , \tag{17a}$$

gdzie h-z_h to sprowadzona wysokość leja cieczy w [m], którą definiuje się następującym wzorem:

$$h - z_h = \frac{\omega^2 R_w^2}{2g}(h_1 - z_{h_1}) , \tag{18}$$

a h_1-z_{h_1} to jej wartość bezwymiarowa. Po zestawieniu wzorów(16), (17) & (18) z uwzględnieniem związków (6) uzyskuje się:

$$\dot{h}_1 - z_{h_1} = \frac{4}{D^2-1}\int_1^D r_1 \int_1^{r_1} \frac{V_1^2(r_2)}{r_2} dr_2 dr_1 = A(n) . \tag{19}$$

Zapotrzebowanie na moc jednostkową N w [W] mieszalnika walcowego określa się w postaci iloczynu momentu obrotowego wałka mieszającego M w [J] i jego prędkości kątowej ω. Ilustruje to wzór:

$$N(z) = M \cdot \omega , \tag{20}$$

$$M = \tau_p F R_w , \quad F = 2\pi R_w z_h , \quad \omega = 2\pi n_0 . \tag{20a}$$

gdzie **F** - to powierzchnia tarcia na wałku w [m^2], n_0 - liczba obrotów wałka na sekundę. Bezwymiarowe zapotrzebowanie na moc mieszalnika walcowego N_1, zwane liczbą Newtona, ma postać:

$$N_1 = \frac{N}{n_0^3 d_w^5 \rho} , \quad d_w = 2R_w , \quad f = \frac{h}{d_w} . \tag{21}$$

Po wstawieniu wzorów (12)& (18)-(20) do wzoru (21) bezwymiarowe zapotrzebowanie na moc mieszalnika uzyskuje ostateczną postać:

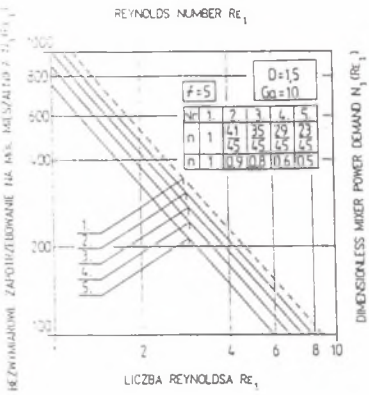
$$N_1 = 2\pi^3 \frac{f}{Re_n} |W_1|^{n-1} W_1 \left[1 - \frac{\pi^2}{2} \frac{Re_n^2}{f \cdot Ga_n} A(n) \right] , \tag{22}$$

gdzie A(n) określa wzór (19), W_1 - wzór (12a), natomiast liczby Reynoldsa i Galileusza dla cieczy nienewtonowskiej są postaci:

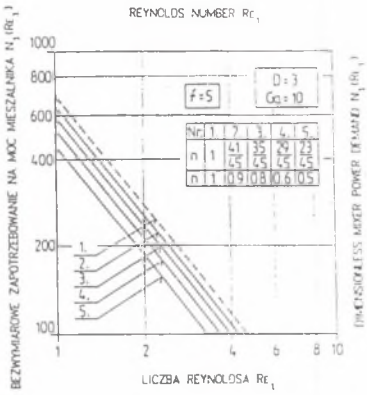
$$Re_n = \frac{\rho R_w^n (\omega R_w)^{2-n}}{m_0(n)} = Re_1 \frac{\omega^{1-n}\mu_0}{m_0(n)}, \quad Ga_n = \frac{\rho^2 R_w^3 g}{\omega^{2n-2} m_0^2(n)}, \quad \frac{Re_n^2}{Ga_n} = \frac{Re_1^2}{Ga_1} \tag{22a}$$

Dla n≡1 wzór (22) uzyskuje znaną z literatury postać [1]:

$$N_1 = \frac{4\pi^3 D^2}{D^2-1} \frac{f}{Re_1} \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{2} \frac{Re_1^2}{f \cdot Ga_1} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{3D^2-1}{(D^2-1)^2} - \frac{6D^4 \ln(D)}{(D^2-1)^3} \right] \right\} . \tag{23}$$



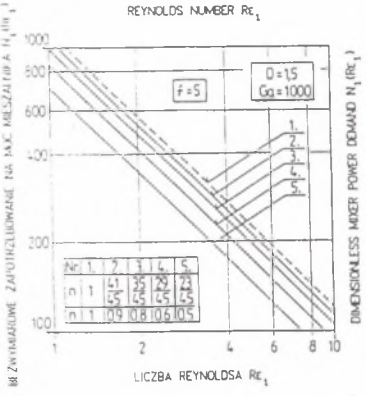
2A



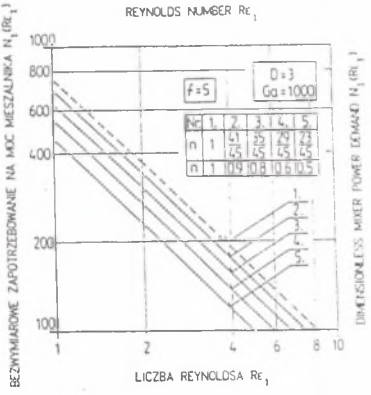
2B

Rys.2. *Bezwymiarowe wartości zapotrzebowania na moc N_1 mieszalnika z mieszadłem walcowym dla indeksu przepływu cieczy n=1; 41/45; 35/45; 29/45; 23/45 i liczby Galileusza Ga=10 i f=5 dla D=1.5 (rys.2A) i D=3 (rys.2B) oraz $m_0(n)=\mu_0\omega^{n-1}$*

Fig.2. *Dimensionless values of the mixer power demand N_1 with the cylindrical stirrer for the flow index n=1; 41/45; 35/45; 29/45; 23/45; and the Galileo number Ga=10 & f=5 for D=1.5 (Fig.2A) and D=3 (Fig.2B and for $m_0(n)=\mu_0\omega^{n-1}$*



3A



3B

Rys.3. *Bezwymiarowe wartości zapotrzebowania na moc N_1 mieszalnika z mieszadłem walcowym dla indeksu przepływu cieczy n=1; 41/45; 35/45; 29/45; 23/45 i liczby Galileusza Ga=1000 i f=5 dla D=1.5 (rys.3A) i D=3 (rys.3B) oraz $m_0(n)=\mu_0\omega^{n-1}$*

Fig.3. *Dimensionless values of the mixer power demand N_1 with the cylindrical stirrer for the flow index n=1; 41/45; 35/45; 29/45; 23/45; and the Galileo number Ga=1000 & f=5 for D=1.5 (Fig.3A) and D=3 (Fig.3B and for $m_0(n)=\mu_0\omega^{n-1}$*

6. WNIOSKI

Wniosek 1. Spadek wartości indeksu przepływu pseudoplastycznej cieczy nienewtonowskiej powoduje spadek wartości zapotrzebowania na moc mieszalnika walcowego w porównaniu z wartościami zapotrzebowania na moc mieszalnika, jakie uzyskuje się dla przepływu cieczy newtonowskiej.

Wniosek 2. Wzrost liczby Galileusza powoduje wzrost wartości zapotrzebowania na moc mieszalnika walcowego. Wzrost liczby Galileusza oznacza wzrost wartości gęstości cieczy lub spadek wartości współczynnika konsystencji cieczy.

Wniosek 1 został potwierdzony teoretycznie oraz doświadczalnie dla cieczy nienewtonowskiej [1].

LITERATURA

[1] Brauer H.: Grundlagen der Einphasen und Mehrphasenströmungen, Verlag Sauerländer, Aarau 1971, s. 888-890.

[2] Czajkowski A.A., Wierzcholski K.: Analytical Solutions of Some Ordinary Non-Linear Differential Equation of the Second Order Describing the non-Newtonian Fluid Flow in the Mixing-Process, Proceedings of "The 7-th International Conference "System - Modelling - Control - 7", Zakopane May 17-21, 1993, Vol.1 pp.108-113.

[3] Wierzcholski K.: Elementy mechaniki płynów (Teoria i zadania) Część I, Politechnika Szczecińska, 1993 , s. 217-226.

Recenzent Prof. dr hab. inż. Ryszard Gryboś

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1993 r.

Abstract

Paper shows the analysis of the cylindrical mixer power demand. The fluid motion is generated by the angular motion of the cylindrical stirrer (Fig.1). There is considered the laminar, and steady motion of isothermic, pseudoplastical and incompressible non-Newtonian fluid with the constant density and fluid dynamic viscosity. The pressure depends on the radial component r. The body forces and energy dissipation were omitted in the energy equation. The problem is presented in the cylindrical coordinates (r, φ, z) where V_r, V_φ, V_z mean the dimensional components of the velocity vector v in the radial, circumferential, and vertical direction (5). The dimensionless functions of the mixer power demand (22) were defined by the dimensionless velocity functions (9), tangential stresses functions (11&12) and functions (16). The paper shows that the decrease of the flow index means the decrease of the mixer power demand (Fig.2&3).