ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1993

Seria: MECHANIKA z. 113 Nr kol. 1198

Andrzej BUCHACZ, Maciej PASEK, Józef WOJNAROWSKI

Katedra Mechaniki Robotów i Maszyn Roboczych Ciężkich
Politechnika Śląska

MODELOWANIE METODĄ HIPERGRAFÓW DRGAJĄCYCH, PRZESTRZENNYCH, WIELOODCINKOWYCH MECHANICZNYCH UKŁADÓW PRĘTOWYCH O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH W SPOSÓB CIĄGŁY

Streszczenie. Praca dotyczy modelowania hipergrafami drgających w przestrzeni, wieloodcinkowych układów prętowych o parametrach rozłożonych w sposób ciągły. Podano definicję hipegrafu oraz dokonano przeglądu podstawowych pojęć związanych z klasą stosowanych grafów. Opisano model pojedyńczego pręta oraz jego odwzorowanie w hipergraf modelu pręta.

MODELLING OF VIBRATING THREE-DIMENSIONAL, MULTI-SEGMENTED MECHANICAL BAR SYSTEMS OF CONTINUOUSLY DISPERSED PARAMETERS WITH A HYPERGRAPH METHOD

Summary. This work concerns modelling of vibrating in space, multi--segmentedbar systems characterized by continuously dispersed parameters, with the aid of hypergraphs. A definition of hypergraph is presented as well as a surveyof basic notions connected with a class of applied hypergraphs, illustrated by a sample. A model of a single bar is described together with its projection in a hypergraph of the bar model.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МНОГООТРЕЗКОВЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ МЕТОДОМ ГИПЕРГРАФОВ

Резюме. Работа касается моделирования гиперграфами колеблющихся в пространстве, многоотрезковых механических стержневых систем с распределенными параметрами. Даются дефиниция гиперграфа и обзор основных понятий связанных с класом примиенияемых графов. Описана модель единичного стержения и его преобразование в гиперграф модели стержня.

1. PRZEGLĄD PODSTAWOWYCH POJĘĆ ZWIĄZANYCH Z KLASĄ STOSOWANYCH GRAFÓW

Opis stosowanej metody modelowania poprzedzono przeglądem podstawowych pojęć z teorii grafów i liczb strukturalnych, w celu ustalenia znaczenia niezbędnych terminów i stosowanej symboliki.

Do modelowania rozważanej klasy układów mechanicznych zastosowano obciążone grafy kategorii k, nazywane w pracy obciążonymi grafami blokowymi lub obciążonymi hipergrafami. Oznaczając przez ${}_1X = \left\{ {}_1x_0, {}_1x_1, \ldots, {}_1x_n \right\}$ - skończony zbiór wierzchołków, ${}_2X$ - rodzinę krawędzi, którymi są dwuelementowe podzbiory wierzchołków w postaci $\left\{ {}_1x_i, {}_1x_j \right\}$ $(i,j = 0,1,2,\ldots,n,\ i \neq j)$, grafem X nazywa się parę [1]

$$X = ({}_1X, {}_2X). \tag{1}$$

Niech ${}_1X$ będzie zbiorem jak w (2.1) i niech ${}_2^kX = ({}_2^kX^{(i)} / i \in N)$, $(k = 2,3,\ldots \in N)$ będzie rodziną podzbiorów ${}_1X$. Rodzinę ${}_2^kX$ nazywa się hipergrafem na ${}_1X$, jeśli:

(i) $\quad {}_2^kX^{(i)} \neq \emptyset \ (i \in N)$,

(ii) $\quad \bigcup_{i \in N} {}_2^kX^{(i)} = {}_1X$,

a zatem hipergrafem nazywa się parę

$$^kX = ({}_1X, {}_2^kX), \tag{1}$$

gdzie:

$${}_2^kX = \left\{ {}_2^kX^{(1)}, {}_2^kX^{(2)}, \ldots, {}_2^kX^{(m)} \right\} \text{ - zbiór krawędzi,}$$

nazywanych w dalszej części pracy blokami lub hiperkrawędziami.

Jeśli w hipergrafie ^kX o n wierzchołkach wyróżnić podzbiór z rodziny podzbiorów wierzchołków o $n_z \leq n$, to grafem zupełnym ^kX_z hipergrafu ^kX jest graf X, w którym każda para wierzchołków jest incydentna, a graf ^kX_z ma:

$$m = \left\{ \begin{matrix} n_z \\ 2 \end{matrix} \right\} \text{ krawędzi.}$$

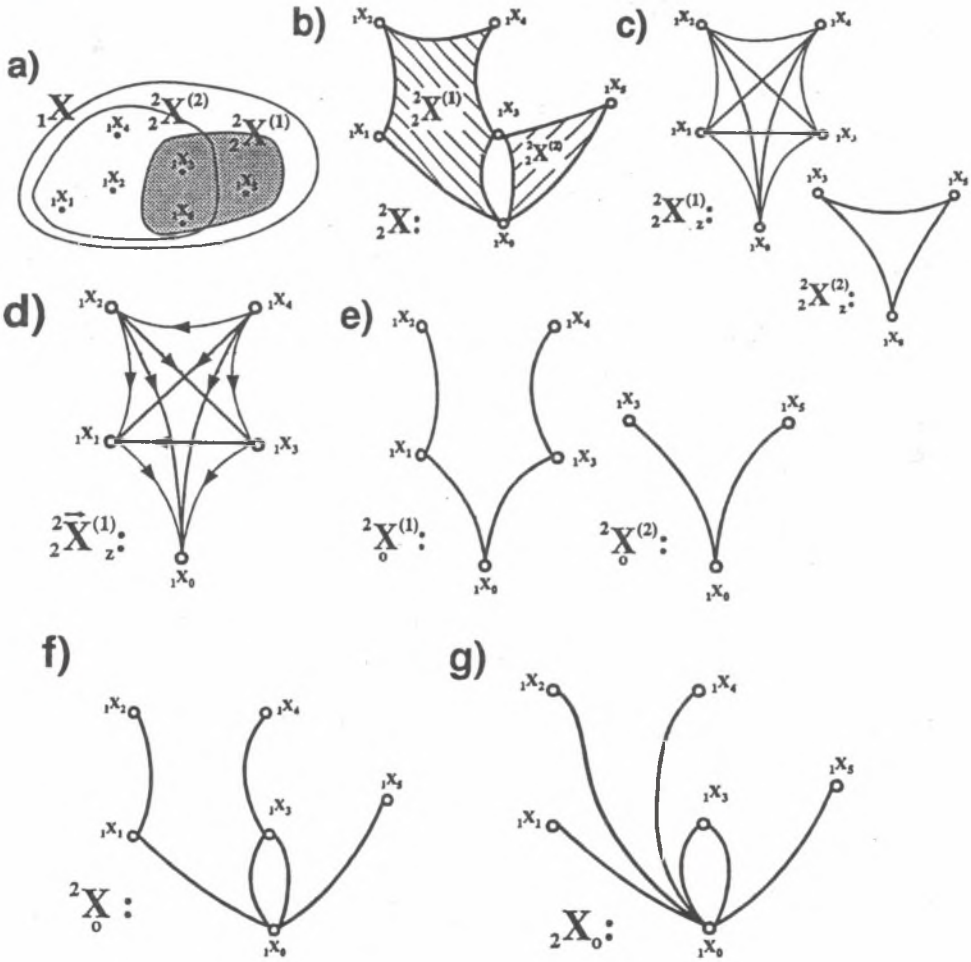
Grafem zupełnym zorientowanym $^k\vec{X}_z$ jest graf zupełny, którego każdej krawędzi przyporządkowano zwrot od wierzchołka grafu o wyższym indeksie do wierzchołka o niższym indeksie (na rysunkach oznaczany symbolicznie strzałką).

Szkieletem ^kX_o hipergrafu ^kX jest graf, który otrzymuje się w wyniku zastąpienia każdego podzbioru wierzchołków drzewem $\underset{o}{X}$, utworzonym z krawędzi jednowymiarowych i rozpiętym na wszystkich wierzchołkach hipergrafu ^kX, natomiast drzewem $\underset{o}{X}$ grafu X o n wierzchołkach i m krawędziach jest spójny podgraf $X_1 \subset X$ o tej samej liczbie wierzchołków i o $\underset{o}{m} = n-1$ krawędzi, w którym nie ma obwodów i pętli.

Szkieletem Lagrange'a nazywa się drzewo, w którym każdy wierzchołek ${}_1x_j$ $(j = 1,\ldots,n)$ jest incydentny poprzez krawędź ${}_2x_k = ({}_1x_j, {}_1x_0)$, $(k = 1,\ldots,\underset{o}{m})$ z wierzchołkiem ${}_1x_0$.

W dalszym ciągu grafy X oraz hipergrafy ${}^{k}X$ przedstawiono w reprezentacji geometrycznej na płaszczyźnie. Zbiory krawędzi ${}_{2}X$ oznaczano liniami, natomiast podzbiory rodziny ${}^{k}_{2}X$ - kontinuami dwuwymarowymi z wyróżnionymi wierzchołkami w postaci okręgów.

Pojęcia przedstawione powyżej zilustrowano przykładem (rys.1a-g).



Rys.1. Stosowane grafy: a) zbiór wierzchołków hipergrafu, b) obraz hipergrafu dwublokowego, c) grafy zupełne bloków hipergrafu, d) zorientowany graf zupełny bloku hipergrafu, e) drzewa bloków hipergrafu, f) szkielet hipergrafu, g) szkielet Lagrange'a hipergrafu

Fig.1. Applied graphs a) an array of hypergraph vertexes b) a figure of a two-block hypergraph c) complete graphs of hypergraph blocks d) a directed complete graph of a hypergraph block f) a hypergraph skeleton g) a Lagrange's skeleton of a hypergraph

Przyjęto sześcioelementowy zbiór wierzchołków ${}_1X = \left\{ {}_1x_0,\ {}_1x_1,\ {}_1x_2,\ {}_1x_3,\ {}_1x_4,\ {}_1x_5 \right\}$. Utworzono dwa podzbiory zbioru wierzchołków (rys.1a), przyjmując k = 2:

$${}_2^2X^{(1)} = \left\{ {}_1x_0,\ {}_1x_1,\ {}_1x_2,\ {}_1x_3,\ {}_1x_4 \right\},$$

$${}_2^2X^{(2)} = \left\{ {}_1x_0,\ {}_1x_3,\ {}_1x_5 \right\},$$

będące dwuelementową rodziną ${}_2^2X = \left\{ {}_2^2X^{(1)},\ {}_2^2X^{(2)} \right\}$.

Dla tej rodziny warunek (i) jest spełniony (podzbiory ${}_2^2X^{(1)}$ i ${}_2^2X^{(2)}$ nie są puste). Ponieważ ${}_2^2X^{(1)} \cup {}_2^2X^{(2)} = {}_1X$, warunek (ii) jest również spełniony, a więc zgodnie z [1] rodzina ${}_2^2X$ jest hipergrafem o dwu blokach. Geometryczną interpretację otrzymanego hipergrafu dwublokowego pokazano na rys.1b. W hipergrafie wyróżniono pięcioelementowy podzbiór zbioru wierzchołków $n_z^{(1)} = \left\{ {}_1x_0,\ {}_1x_1, {}_1x_2,\ {}_1x_3,\ {}_1x_4,\ {}_1x_5 \right\}$, tworząc graf zupełny ${}^2X_z^{(1)}$ bloku ${}_2^2X^{(1)}$, w którym każda para wierzchołków jest incydentna poprzez $m = \binom{5}{2} = 10$ krawędzi, oraz trójelementowy podzbiór zbioru wierzchołków $n_z^{(2)} = \{ {}_1x_0,\ {}_1x_3,\ {}_1x_5 \}$, tworząc graf zupełny ${}^2X_z^{(2)}$ bloku ${}_2^2X^{(2)}$, w którym każda para wierzchołków jest incydentna poprzez $m = \binom{3}{2} = 3$ krawędzie (rys.1c). Przykładowo zorientowano graf zupełny ${}^2X_z^{(1)}$, tzn. nadano jego krawędziom orientację zaznaczoną na rys.1d symbolicznie strzałką. Drzewem grafu ${}^2X_z^{(1)}$ jest każdy jego pięciowierzchołkowy podgraf o $m^{(1)} = n^{(1)} - 1 = 4$ krawędziach, natomiast drzewem grafu ${}^2X_{oz}^{(2)}$ trójwierzchołkowy podgraf o $m_o^{(2)} = n_z^{(2)} - 1 = 2$ krawędziach. Podgrafy będące drzewami nie mogą posiadać obwodów i pętli i muszą być spójne. Drzewa obu bloków hipergrafu pokazano na rys.1e. Szkielet hipergrafu złożony z drzew grafów zupełnych obu jego bloków pokazano na rys.1f. Szkielet Lagrange'a hipergrafu pokazany na rys.1g otrzymano z drzew grafów zupełnych jego bloków, złożonych z krawędzi łączących wierzchołki hipergrafu z wierzchołkiem odniesienia ${}_1x_0$.

2. OPIS MODELOWANYCH UKŁADÓW

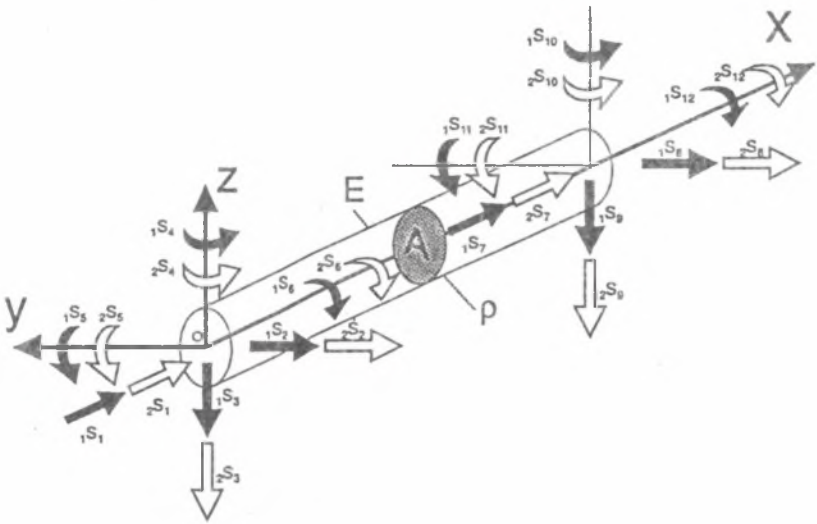
Przedmiotem rozważań są drgające wieloodcinkowe mechaniczne układy prętowe w postaci modeli o parametrach rozłożonych w sposób ciągły i o odcinkowo stałym przekroju.

W modelowaniu rozpatrywanej klasy układów ciągłych zależności pomiędzy amplitudami sił uogólnionych ${}_2s_j \in {}_2S$ i uogólnionych przemieszczeń ${}_1s_i \in {}_1S$ wyraża się stosując pojęcie podatności dynamicznej Y_{ij} [2], czyli opatrzonej znakiem amplitudy przemieszczenia uogólnionego w kierunku i-tej współrzędnej uogólnionej, wywołanego uogólnioną siłą w postaci funkcji harmonicznej o amplitudzie jednostkowej, odpowiadającą j-tej współrzędnej uogólnionej, to znaczy

$$ {}_1s_i = Y_{ij}\, {}_2s_j, \tag{2} $$

gdzie: ${}_2s_k = 1e^{a\omega t}$, a = sqrt(-1), ω - częstość.

Rozpatruje się ciągły, ograniczony model pręta (rys.3) o stałym przekroju poprzecznym A, wykonany z jednorodnego materiału o module Younga E i gęstości ρ [3].



A - pole przekroju poprzecznego,
E - moduł Younga materiału pręta,
ρ - gęstość materiału pręta,
Oxy - układ lokalny pręta,
${}_1s_1, {}_1s_2, {}_1s_3, {}_1s_7, {}_1s_8, {}_1s_9$ - przemieszczenia liniowe końców pręta,
${}_1s_4, {}_1s_5, {}_1s_6, {}_1s_{10}, {}_1s_{11}, {}_1s_{12}$ - przemieszczenia kątowe końców pręta,
${}_2s_1, {}_2s_2, {}_2s_3, {}_2s_7, {}_2s_8, {}_2s_9$ - siły liniowe,
${}_1s_4, {}_1s_5, {}_1s_6, {}_1s_{10}, {}_1s_{11}, {}_1s_{12}$ - momenty sił.

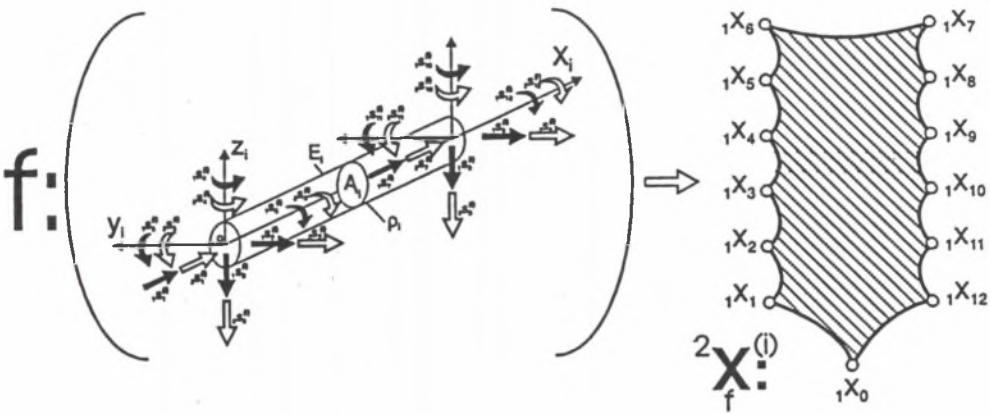
Rys.2. Ciągły i ograniczony model pręta, któremu przyporządkowano dwanaście współrzędnych uogólnionych

Fig.2. A continuous and limited model of a bar, to which twelve generalised coordinates are attributed

Momenty bezwładności przekroju poprzecznego pręta na zginanie i skręcanie przyjęto jako stałe. Prętowi przyporządkowano prostokątny układ współrzędnych Oxy, nazywany w dalszej części pracy lokalnym układem pręta w następujący sposób:

- początek układu współrzędnych pokrywa się z końcem pręta,
- oś Ox lokalnego układu współrzędnych pokrywa się z osią obojętną zginania pręta.

Każdemu z końców pręta przyporządkowano sześć przemieszczeń uogólnionych: trzy przemieszczenia liniowe ($_1s_1$, $_1s_2$, $_1s_3$ dla lewego końca pręta, $_1s_7$, $_1s_8$, $_1s_9$ dla prawego końca pręta) oraz trzy przemieszczenia kątowe ($_1s_4$, $_1s_5$, $_1s_6$ dla lewego końca pręta, $_1s_{10}$, $_1s_{11}$, $_1s_{12}$ dla prawego



Rys. 3. Reprezentacja geometryczna odwzorowania modelu pręta w hipergraf modelu pręta

Fig. 3. A geometrical representation of a bar model projection in a bar model hypergraph

końca pręta). Siły uogólnione działające na pręt są siłami i parami sił działającymi w kierunkach zgodnych ze współrzędnymi uogólnionymi (dla lewego końca pręta siły liniowe $_2s_1$, $_2s_2$, $_2s_3$, oraz momenty sił $_2s_4$, $_2s_5$,

${}_2s_6$, dla prawego końca pręta siły liniowe ${}_1s_7$, ${}_1s_8$, ${}_1s_9$ oraz momenty sił ${}_1s_{10}$, ${}_1s_{11}$, ${}_1s_{12}$).

Dla przyjętego modelu zbiór uogólnionych przemieszczeń pręta można zapisać w postaci:

$$ {}_1S = \{{}_1s_1, {}_1s_2, {}_1s_3, {}_1s_4, {}_1s_5, {}_1s_6, {}_1s_7, {}_1s_8, {}_1s_9, {}_1s_{10}, {}_1s_{11}, {}_1s_{12}\}. $$

Dokonując wzajemnie jednoznacznego odwzorowania (rys.3)

$$ f : {}_1S \longrightarrow {}_1X , \tag{3} $$

w ten sposób że:

$$ f\,({}_1S_i) = {}_1X_i , \tag{4} $$

gdzie:

$$ {}^kX = ({}_1X, {}^k_2X) , $$

$$ {}_1X = \{ {}_1X_1, {}_1X_2, \ldots, {}_1X_n \} $$

${}^k_2X$ - jednoelementowa rodzina - n-elementowy podzbiór wierzchołków ${}_1X$.

otrzymuje się hipergraf modelu pręta:

$$ {}^k_fX = [\, {}^kX, f], \tag{5} $$

Rozpatrując i-ty odcinek, w k-odcinkowym układzie prętowym o odcinkowo stałym przekroju, przyjmuje się jego model w postaci hipergrafu ${}^k_fX^{(i)}$.

LITERATURA

[1] A.Buchacz: Synteza drgających układów prętowych w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. ZN Pol.Śl., nr 1113, Gliwice 1991.

[2] J.Wojnarowski: Zastosowanie grafów w analizie drgań układów mechanicznych. PWN, Warszawa - Wrocław 1981.

[3] J.Kruszewski:Metoda sztywnych elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1975.

Recenzent: Doc. dr hab. Roman Klus

Wpłynęło do Redakcji dnia 21.11.1992

Abstract

This work concerns multi-segmental, vibrating mechanical systems of bars, presented in the form of models characterised by contnuously dispersed parameters and a constant cross - section.

A presentation of an applied modelling method is proceeded by a review of basic notions of graphs and structural numbers theory, in order to establish meanings of necessary terms and applied symbolic representation. The notions are illustrated by an example (Fig. 1a-g). Loaded graphs of k-category are used to model the presented class of mechanical systems. The graphs are described as loaded block graphs or loaded hypergraphs. A continuous, limited model of a constant-section bar is presented, where a bar is made of uniform material that is characterised by Young modulus E and density ρ (Fig. 2). Moment of inertia of a cross-section of a bar by bending and twisting the bar are assumed to be constant. A perpedicular coordinate system Oxy is attributed to the bar, which is called further a local bar system. A beginning of the coordinate system is designated to the end of a bar and Ox axis of the local bar system is identical with indifferent axis of bending of the bar. Six generalised dislocations are attributed to each end of the bar. Generalised forces that work on the bar are forces and pairs of forces acting in the directions concordant to generalised coordinates. Performing a mutually univocal projection (Fig.3) a hypergraph of a bar model is obtained. Considering i-section of a k-segmental system of constant-section bars, a bar model is presented in the form of the hypergraph ${}^{k}\underset{f}{X}^{(i)}$.

Wykonano w ramach BK-481/RMT-7/92