ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1993

Seria: MECHANIKA z. 113 Nr kol. 1198

Andrzej Antoni CZAJKOWSKI, Krzysztof WIERZCHOLSKI
Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego,
Katedra Techniki Cieplnej Politechniki Szczecińskiej

ANALIZA NUMERYCZNA WPŁYWU NIEMONOTONICZNYCH ZMIAN LEPKOŚCI DYNAMICZNEJ CIECZY NA MOC MIESZALNIKA WALCOWEGO W PROCESIE MIESZANIA CIECZY NEWTONOWSKIEJ

Streszczenie. Praca przedstawia analizę numeryczną bez wymiarowych wartości mocy mieszalnika walcowego dla niemonotonicznie zmiennej lepkości dynamicznej cieczy newtonowskiej zależnej od własności chemicznych cieczy w obszarze mieszania bez uwzględnienia wpływu temperatury .

NUMERICAL ANALYSIS OF INFLUENCE OF THE VARIABLE NON-MONOTONE DYNAMIC FLUID VISCOSITY ON THE CYLINDRICAL MIXER POWER IN THE MIXING PROCESS OF THE NEWTONIAN FLUID

Summary. The numerical analysis of the dimensionless va lues of the cylindrical mixer power for the variable non monotone dynamic viscosity of the newtonian fluid dependent from the chemical properties in the mixingspace is presented in the paper. In the considerations the temperature influence is not taken into account.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ НЕМОНОТОННЫХ ИЗМЕНЕНИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ НА МОЩНОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО МИКСЕРА В ПРОЦЕССЕ СМЕШАНИЯ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

Резюме. В настоящей работе представлен численный анализ безразмерных значечии мощности цилиндрического миксера дла немонотонных функции динамической вязкости ньютоновской жидкости зависимой от химических свойств в пространствие смиешания без учёта влияния температуры.

1. WSTĘP

Przedmiotem badań jest wyznaczanie mocy jednostkowej mieszalnika walcowego dla stcjonarnego przepływu cieczy newtonowskiej wywołanego ruchem obrotowym cylindrycznego mieszadła. Przyjmuje się laminarny przepływ cieczy nieściśliwej o stałej gęstości ρ z pominięciem sił masowych. Uwzględnia się niemonotonicznie zmienną lepkość dynamiczną mieszanej cieczy zależną od jej składu chemicznego. Nie analizuje się wpływu temperatury na zmiany współczynnika lepkości dynamicznej mieszanej cieczy.

Moc mieszalnika jest istotnym parametrem procesu mieszania cieczy. Dlatego celem badań jest ustalenie wpływu różnych niemonotonicznych zmian lepkości dynamicznej cieczy newtonowskiej na wartość mocy mieszalnika walcowego oraz porównanie wyników ze znanymi z literatury osiągnięciami innych badaczy [1].

2. PODSTAWOWE RÓWNANIA I WIELKOŚCI

2.1. Rozwiązanie równań ruchu cieczy

Przepływ opisany jest równaniem pędu i ciągłości [2]:

$$\rho \frac{dv}{dt} = \mathrm{Div}\, \acute{S}, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\, v = 0. \tag{2}$$

Związki konstytutywne są określone wzorem:

$$\acute{S} = -\, pU + 2\mu T_d; \tag{3}$$

natomiast składowe wektora prędkości v w układzie współrzędnych walcowych przyjmują postaci:

$$V_1=V_\varphi \quad , \; V_2=V_r, \quad V_3=V_z. \tag{4}$$

Analizuje się mieszalnik walcowy z wałkiem cylindrycznym, rys.1.

Zakłada się, że prędkość przepływu cieczy wywołanego ruchem obrotowym wałka mieszającego opisana jest wektorem o następujących współrzędnych {[2],[3]}:

$$V_\varphi = V_\varphi(r), \qquad V_r(r) \equiv 0, \qquad V_z(r) \equiv 0. \tag{5}$$

Nadto lepkość $\mu=\mu(r)$ oraz ciśnienie p=const i gęstość ρ=const.

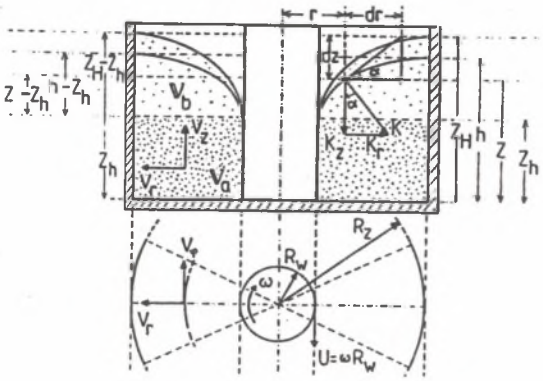
Wykorzystując bezwymiarowe wielkości przyjmuje się następujące związki {[2],[3]}:

$$r=R_w r_1, \qquad \mu=\mu_o\mu_1, \qquad V_\varphi=UV_{\varphi_1}; \qquad U=\omega R_w. \tag{6}$$

Po podstawieniu zależności (3)-(5) do równań (1) & (2) i po uwzględnieniu znanych związków geometrycznych i pominięciu pochodnych lokalnych i konwekcyjnych wektora prędkości oraz przyjęciu zmiennej bezwymiarowej lepkości dynamicznej cieczy i po uwzględnieniu związków (6) otrzymuje się równanie ruchu w następującej bezwymiarowej postaci [2]:

$$\frac{d^2V_{\varphi_1}}{dr_1^2} + \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{\mu_1}\frac{d\mu_1}{dr_1}\right]\frac{dV_{\varphi_1}}{dr_1} - \left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1\mu_1}\frac{d\mu_1}{dr_1}\right]V_{\varphi_1} = 0, \tag{7}$$

gdzie niewiadomą jest funkcja $V_{\varphi_1}=V_{\varphi_1}(r_1)$, $1\le r_1\le D$, $1<D<+\infty$.



Rys.1 Przekrój mieszalnika z cylindrycznym wałkiem mieszającym
Fig.1 The section of the mixer with the cylindrical stirrer

Zakłada się, że ciecz przylegająca do wałka mieszającego ma prędkość jego powierzchni, natomiast na ściankach mieszalnika prędkość cieczy zanika. Stąd warunki brzegowe dla równania (7) otrzymują następującą bezwymiarową postać:

$$V_{\varphi_1}(r_1=1) = 1, \qquad V_{\varphi_1}(r_1=D) = 0. \tag{7a}$$

Po wykonaniu dwukrotnego całkowania równania (7) i nałożeniu na jego rozw ązanie ogólne warunków brzegowych (7a) uzyskuje się rozwiązanie szczególne w następującej postaci {[2],[3]}:

$$V_{\varphi_1}(r_1) = \frac{r_1 \cdot G_{r_1}(r_1)}{G_1(r_1)}, \qquad G_{r_1}(r_1) \equiv \int_{r_1}^{D} \frac{dr_2}{r_2^3\, \mu_1(r_2)} \tag{8}$$

dla $1 \le r_1 \le r_2 \le D$.

2.2. Naprężenia styczne występujące w mieszanej cieczy

Postać wymiarową naprężeń stycznych dla stałej temperatury i zmiennej lepkości dynamicznej cieczy określa wzór [1]:

$$\tau(r_1) = -\mu_o \omega\, r_1\, \mu_1(r_1) \frac{d}{dr_1}\left[\frac{V_{\varphi_1}}{r_1}\right]. \tag{9}$$

Po wstawieniu rozwiązania (8) do wzoru (9) otrzymuje się następujący wzór określający wartość wymiarowych naprężeń stycznych na głębokości przestrzeni mieszanej cieczy [3]:

$$\tau(r_1) = \frac{\mu_o \omega}{r_1^2 \, G_1}. \tag{10}$$

Wymiarowe wartości naprężeń stycznych na powierzchni wałka mieszjącego dla zmiennej lepkości dynamicznej cieczy mają postać:

$$\tau_p \equiv \tau(r_1=1) = \frac{\mu_o \omega}{G_1}. \tag{11}$$

2.3. Głębokość leja cieczy wytworzonego w procesie mieszania

Z przyjętych założeń (rys.1) wynika następujący związek [2]:

$$\frac{K_r}{K_z} = \frac{dz}{dr} \quad \text{gdzie} \quad K_r = \frac{mV_\varphi^2}{r}, \qquad K_z = mg. \tag{12}$$

Stąd otrzymujemy równanie różniczkowe w postaci wymiarowej:

$$\frac{V_\varphi^2}{r} \, dr = g \, dz. \tag{13}$$

rzyjmuje się warunek brzegowy: $z=z_h$ dla $r=\omega R_w$. (13a)

Aby uzyskać bezwymiarową postać zadanej głębokości leja cieczy otrzymanego w trakcie mieszania przyjmuje się związek [1]:

$$z - z_h = \frac{\omega^2 R_w^2}{2g} \, (z_1 - z_h). \tag{14}$$

Po uwzględnieniu związków (6) i (14) w równaniu (13) uzyskuje się następujące równanie I-go rzędu w bezwymiarowej postaci:

$$\frac{V_{\varphi_1}^2}{r_1} \, dr_1 = \frac{1}{2} \, dz_1, \tag{15}$$

Warunek brzegowy (13a) daje: $z_1=z_{h_1}$ dla $r_1=1$. (15a)

Po wstawieniu rozwiązania (8) do równania (15) i wykonaniu całkowania oraz odpowiednich przekształceń, a także nałożeniu warunku brzegowego (15a) na otrzymane jego rozwiązanie ogólne uzyskuje się wzór na bieżącą głębokość leja cieczy wytworzonego w procesie mieszania wokół wałka mieszającego [3]:

$$z_1 - z_{h_1} = \frac{2}{G_1^2(r_2)} \int_1^{r_1} [r_2 \, G_{r_2}^2 \, r_3)] \, dr_3, \tag{16}$$

dla $1 \le r_1 \le r_2 \le r_3 \le D$; $1 < D < +\infty$; $z_{h_1} \le z_1 \le z_{H_1}$.

3. MOC JEDNOSTKOWA MIESZALNIKA

Objętość cieczy tworzącej lej podczas mieszania określają dwa równoznaczne wzory:

$$\mathbb{V}_b = \pi\,(R_z^2 - R_w^2)(h - z_h), \tag{17}$$

$$\mathbb{V}_b = \int_0^{2\pi} \left[\int_{R_w}^{R_z} \left(\int_0^{z-z_h} dz \right) r\, dr \right] d\varphi \equiv 2\pi \int_{R_w}^{R_z} (z - z_h) r\, dr \tag{18}$$

Postępując tak, jak w zależności (14), uzyskuje się:

$$h - z_h = \frac{\omega^2 R_w^2}{2g}\,(h_1 - z_{h_1}). \tag{19}$$

Łącząc wzory (17) i (19) i podstawiając w miejsce $\mathbb{V}_b$ wyrażenie otrzymane ze wzorów (16) i (18) z równoczesnym uwzględnieniem związków (6) uzyskuje się następującą równość:

$$h_1 - z_{h_1} = \frac{4}{(D^2-1)G_1^2} \int_1^D r_1 \int_1^{r_1} r_2\, G_{r_2}^2(r_3)\, dr_2 dr_1 \equiv \mathbb{A}(\mu_1). \tag{20}$$

Moc jednostkową mieszalnika określa się jako iloczyn momentu obrotowego wałka mieszającego przez jego prędkość kątową. Stąd:

$$N(z) = M\,\omega, \tag{21}$$

gdzie

$$M = \tau_p F R_w, \qquad F = 2\pi R_w z_h, \qquad \omega = 2\pi n_o. \tag{21a}$$

Po przyjęciu wymiarowych naprężeń stycznych (11) we wzorach (21) wymiarowa moc jednostkowa mieszalnika ma postać:

$$N(z) = \frac{8\pi^3 n_o^2 \mu_o R_w^2 z_h}{G_1}. \tag{22}$$

Aby otrzymać bezwymiarową moc mieszalnika przyjmuje się:

$$N = n_o^3\, d_w^5\, \rho\, N_1, \qquad d_w = 2R_w, \qquad f \equiv \frac{h}{d_w}. \tag{23}$$

Stąd bezwymiarową postać mocy jednostkowej mieszalnika dla zmiennej lepkości dynamicznej cieczy i zadanego D określa wzór:

$$N_1(\bar{Re}) = \frac{2\pi^3}{G_1}\frac{f}{\bar{Re}}\left[1 - \frac{\pi^2}{2}\frac{\bar{Re}^2}{f\cdot Ga}A(\mu_1)\right], \tag{24}$$

gdzie $A(\mu_1)$ wynika z (20); $\bar{Re}$,Ga-liczby Reynoldsa i Galileusza.

Dla stałej lepkości dynamicznej cieczy $\mu_1 \equiv 1$ wzór (24) otrzymuje znaną z literatury następującą postać {[1],s.895 ; [3]}:

$$N_1(\bar{Re}) = 4\pi\frac{D^2}{D^2-1}\frac{f}{\bar{Re}}\left\{1 - \frac{\pi^2}{2}\frac{\bar{Re}^2}{f\cdot Ga}\left[1 + \frac{3}{2}\frac{3D^2-1}{(D^2-1)^2} - \frac{6D^4\ln(D)}{(D^2-1)^3}\right]\right\}. \tag{25}$$

4. ANALIZA NUMERYCZNA MOCY JEDNOSTKOWEJ MIESZALNIKA

W celu wykonania analizy numerycznej wzoró (24) i (25) podających bezwymiarową moc mieszalnika przyjmuje się następujący model bezwymiarowej lepkości dynamicznej cieczy {[2],[3]}:

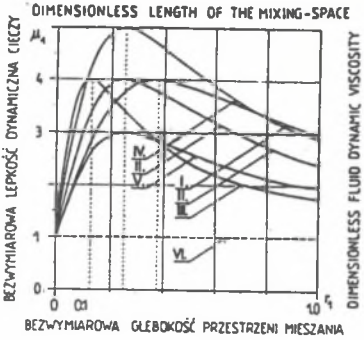
$$\mu_1(r_2) = \frac{ar_2}{r_2^2 + b} + 1. \tag{26}$$

Analizę numeryczną wzoru (26) przeprowadzono dla wartości parametrów a=2.25; 1.5; 0.75 i b=9/64; 4/64; 1/64 przy s=6 oraz a=2; 1.5; 1 dla b=1/16 i s=8; 6; 4 (Rys.2a,b);natomiast analizę wzorów (24) i (25) dla zadanych a,b i s wykonano dla parametrów Ga=10 i D=1.5(Rys.3a), D=3(Rys.3b) oraz Ga=1000 i D=1.5(Rys.3c) D=3 (Rys.3d) dla f=5.Wykorzystano komputer PC 80386/40 i TPv.6.

5. WNIOSKI

WNIOSEK 1: Oddalanie się ekstremum ustalonej wartości lepkości dynamicznej cieczy newtonowskiej w obszarze mieszania od wałka mieszjącego powoduje wzrost wartości mocy mieszalnika. Wzrost ekstremalnych wartości lepkości dynamicznej cieczy new tonowskiej w ustalonej odległości od wałka mieszającego w obszarze mieszania powoduje wzrost wartości mocy mieszalnika.

W przypadku rozpatrywania zmiennej lepkości dynamicznej cieczy wartości otrzymanych mocy mieszalnika walcowego są większe od wartości mocy, jakie uzyskuje się dla stałej lepkości cieczy.



2A

Lepkość zmienna	Odległość extremum od wałka zmienna			ustalona			Lepkość stała
Nr. μ_4	I.	II.	III.	IV.	II.	V.	VI.
Nr. N_1	1.	2.	3.	4.	2.	5.	6.
$a=s\sqrt{b}$	2,25	1,5	0,75	2	1,5	1	0
b	$\frac{9}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	1 / 0
s	6	6	6	8	6	4	0 / 1
Variable viscosity	variable			steady			Constant viscosity
	Distance from the mixer's stirrer						

2B

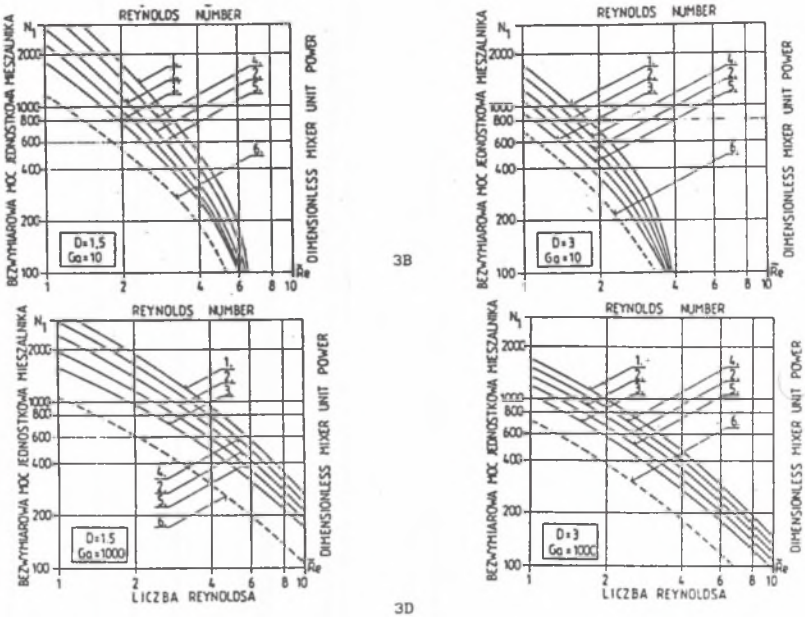
Rys.2. Niemonotoniczne zmiany bezwymiarowych wartości lepkości dynamicznej cieczy (rys.2a) i tabela oznaczeń (rys.2b)
Fig.2. Non-monotone dimensionless variables of fluid dynamic viscosity (fig.2a) & table of function denotes (fig.2b)

WNIOSEK 2: Wzrost liczby Galileusza powoduje wzrost wartości mocy mieszalnika walcowego z cylindrycznym wałkiem mieszającym.

WNIOSEK 3: Dla stałej lub zmiennej lepkości dynamicznej cieczy wraz ze wzrostem wielkości mieszalnika od D=1.25 do D=3 obserwuje się spadek wartości jego mocy.

ZESTAWIENIE OZNACZEŃ

A - funkcja zawierająca wzór lepkości dynamicznej cieczy,
D - $D=R_z/R_w$, gdzie $D\in(1;+\infty)$,
F - powierzchnia tarcia na wałku w [m],
Ga - liczba Galileusza: $Ga \equiv (\rho^2 d_w^3 g)/\mu_o^2$; $Ga \in (10^{-1};10^5)$
G_{r_k} , G_1 - oznaczenia funkcji zawierających całki, dla k=1,2
K_r ,K_z ,K- siły: odśrodkowa, ciążenia i ich wypadkowa w [N],
M - moment obrotowy wałka mieszającego w [J],
N , N_1 - moc mieszalnika walcowego w [W]; wartość bezwymiarowa
$\bar{Re}$ - liczba Reynoldsa: $\bar{Re} \equiv (\rho n_o d_w^2)/\mu_o$; $\bar{Re} \in (10^{-1};10^3)$,
R_w , R_z - długości promieni : wałka i mieszalnika w [m],
$\acute{S}$, τ_{ij} - diada $\acute{S}$ o współrzędnych naprężeń τ_{ij} w [Pa],
T_d , θ_{ij} - tensor pręd.deformacji o współrzędnych θ_{ij} w [1/s],



Rys.3. Bezwymiarowe wartości mocy jednost.mieszalnika walcowego przy zmiennej (krzywe 1,2,3) i ustalonej (krzywe 4,2,5) odległości wartości ekstremum lepkości od wałka mieszającego dla parametrów:Ga=10 i D=1.5 (rys.3a),D=3(rys.3b) oraz dla Ga=1000 i D=1.5 (rys.3c),D=3 (rys.3d) przy f=5.

Fig.3. Dimensionless values of the cylindrical mixer power for the variable (curves 1,2,3) and constant (curves 4,2,5) distance of extreme of the fluid dynamic viscosity from the stirrer for parameters: Ga=10 & D=1.5 (Fig.3a) , D=3 (Fig.3b) and Ga=1000 & D=1.5 (Fig.3c),D=3 (Fig.3d) ,f=5.

U - stała prędkość wałka mieszającego w [m/s],
$\mathbb{U}$, δ_{ij} - tensor jednostkowy o współrzędnych δ_{ij},
$\mathbb{V}_a$ - objętość cieczy przylegającej do wałka w [m],
$\mathbb{V}_b$ - objętość cieczy tworzącej lej w [m],
V_1, V_2, V_3 - składowe wektora prędkości cieczy v w [m/s],
V_φ, V_r, V_z - współrzędne wektora prędkości cieczy po kierunkach obwodowym, promieniowym i głębokości w [m/s],
V_{φ_1} - bezwymiarowa prędkość cieczy w kierunku obwodowym,
a, b - liczby rzeczywiste: $a \in (-2\sqrt{b}, +\infty)$, $b \in (0, +\infty)$,
d - oznaczecie pochodnej substancjalnej,
d_w - średnica wałka mieszającego w [m],
f - bezwymiarowy stosunek sprowadzonej wysokości poziomu mieszanej cieczy do średnicy wałka: f=5,
g - przyśpieszanie ziemskie w [m/s] ,
h, h_1 - sprowadzona wysokość poziomu cieczy [m];war.bezwym,

$h - z_h$ - sprowadzona wysokość leja cieczy w [m],
$h_1 - z_{h_1}$ - sprowadzona bezwymiarowa wysokość leja cieczy,
i,j - bezwymiarowe indeksy : $i,j=1,2,3$;
m - masa cieczy w [kg],
n_o - liczba obrotów wałka mieszającego na sec. w [obr/s]
p - stała wartość ciśnienia w [Pa],
r - współrzędna promieniowa układu cylindrycznego w [m]
r_1, r_2, r_3 - bezwymiarowe współrzędne obwodowe,
s - liczba całkowita: $a=s\sqrt{b}$, gdzie $s = 8, 6, 4$;
t - stały czas w [s],
v - wektor prędkości cieczy w [m/s],
z, z_1 - wysokość mieszanej cieczy do obranego punktu na przestrzeni leja cieczy w [m]; wartość bezwymiarowa,
$z - z_1$ - zadana wysokość leja cieczy w [m],
$z_1 - z_{h_1}$ - zadana bezwymiarowa wysokość leja cieczy,
z_H, z_{H_1} - max wysokość mieszanej cieczy w [m]; war. bezwym.,
$z_H - z_h$ - maksymalna wysokość leja cieczy w [m],
z_h, z_{h_1} - maksymalna wysokość mieszanej cieczy przylegającej do wałka mieszającego w [m]; wartość bezwymiarowa,
α - kąt między siłą wypadkową a siłą ciążenia,
β - przyjęta dowolna bezwym.stała w obszarze całkowania
μ, μ_o, μ_1 - lepkość dynamiczna cieczy, charakterystyczny współczynnik lepkości dynamicznej w [Pa·s]; war.bezwym.,
ρ - stała gęstość płynu w [kg/m],
τ, τ_p - naprężenia styczne na głęb. mieszania i powierzchni wałka mieszającego w [Pa] przy zm.lep.dynam.cieczy,
φ - współrzędna obwodowa w [m] układu cylindrycznego,
ω - prędkość kątowa wałka mieszającego w [1/s].

LITERATURA

[1] Brauer H.: Grundlagen der Einphasen und Mehrphasenstromungen, Verlag Sauerlander, Aarau 1971, s.887-898.

[2] Czajkowski A.A., Wierzcholski K.: Analiza numeryczna rozkładu wartości funkcji prędkości cieczy newtonowskiej o niemonotonicznie zmiennej lepkości dynamicznej w przepływach występujących w mieszalnikach walcowych. Materiały XXXI Sympozjonu "Modelowanie w mechanice", Wisła 17-27 II 92 r., ZN Pol. Śl., Mechanika z.107, Gliwice 1992

[3] Wierzcholski K., Czajkowski A.A.: Nieustalony przepływ cieczy lepkiej wywołany obrotowym ruchem cylindrycznych powierzchni w mieszalnikach, Materiały IX Krajowej konferencji mechaniki płynów, Kraków 10-12 IX 90 r., s.377-382.

Recenzent: Prof. Ryszard Gryboś

Wpłynęło do Redakcji dnia 25.11.1992

Abstract

The numerical analysis of the dimensionless values of the cylindrical mixer power (Formulae: 24, 25 ; Fig.3a,b,c,d) for the variable non-monotone dynamic viscosity of the newtonian fluid (Formula: 26; Fig.2) dependent from the chemical properties in the mixing space (Fig.1) is presented in the paper.

The increase of the distance of the extreme of the constant value of the dynamic viscosity of the newtonian fluid from the stirrer in the mixing-space means the increase value of the cylindrical mixer power. The increase of the extreme values of the dynamic viscosity of the newtonian fluid for the constant distance from the stirrer in the mixing-space means the increase value of the cylindrical mixer power.The above results are compared with the values of the mixer power obtained in the case of the fluid mixing with the constant dynamic viscosity.

Also, the increase of the Galileo number means the increase of the mixer power. For the constant or variable of the fluid dynamic viscosity the decrease values of the mixer power are observed during the mixer's size increase.