ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1993

Seria: MECHANIKA z. 113 Nr kol. 1198

Andrzej ICHA

Zakład Dynamiki Morza
Instytut Oceanologii PAN

FUNKCJONALNE PODEJŚCIE DO PROBLEMU TURBULENCJI

Streszczenie. W pracy zaprezentowano przegląd zagadnień związanych z przedstawieniem funkcjonału charakterystycznego w teorii turbulencji w postaci całki po trajektoriach. Stosując formalizm Martina-Sigga-Rose'a, funkcjonał charakterystyczny powiązany z równaniami Naviera-Stokesa wyrażono w postaci podwójnej całki kontynualnej. Krótko omówiono zastosowanie metody grupy renormalizacji oraz techniki diagramów w opisie rozwiniętego przepływu turbulentnego.

FUNCTIONAL APPROACH TO TURBULENCE PROBLEM

Summary. The paper presents a review of problems related to path integral representation of the characteristic functional in turbulence theory. By adopting the MSR formalism, the characteristic functional associated with Navier-Stokes equations is expressed in terms of double continual integral. Applications of the renormalization group method and diagram technique to fully developed turbulence are briefly discussed.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ ТУРБЛЕНТНОСТИ

Резюме. В обзоре приводится формулировка теории турблентности, использующая представление характиристического функционала в виде интеграла по траекториям. На основе формализма Мартина-Сиджия-Роуза, характеристический функционал, связанный с уравнениями Навье-Стокса, выражено в виде двукратного континуального интеграла. Дается короткий обзор применения метода ренормализационной группы и диаграммной техники в развитом турблентном течении.

1. WSTĘP

Zagadnienie turbulencji, stanowiące najtrudniejszy problem klasycznej fizyki, jest analizowane na różnych poziomach rozważań wynikających z odmiennych podejść metodologicznych oraz celów stawianych przez badaczy w ramach określonych dyscyplin naukowych. Od czasu wybitnych prac Reynoldsa (zob. [1]), wyjaśniających istotę zjawiska turbulencji, minęło ponad sto lat. Zgodnie z opinią A. Dorodnicyna, "[...] jednak jeśli w teorii turbulencji w ciągu tych stu lat był osiągnięty jakikolwiek postęp, to tylko dzięki metodom teoretycznym" [2].

Z uwagi na podstawowe znaczenie teorii turbulencji dla wielu dziedzin wiedzy (zob. [1,3,4]), zagadnienie to przyciagało uwagę wielu uczonych, w tym matematyka A. N. Kołmogorowa. Jego prace ugruntowały statystyczne podejście do tego problemu, stwarzające nadzieję zbudowania pełnej, ilościowej teorii.

W sformułowaniu Kołmogorowa teoria turbulencji jest statystyczną hydromechaniką, w której termo- i hydrodynamiczne pola przepływu (temperatura, gęstość, prędkość, ciśnienie itp.) są losowymi funkcjami punktów $M = (x,t)$ klasycznej czasoprzestrzeni, a w charakterze operacji ich uśredniania wykorzystuje się wartość oczekiwaną [1,3].

Pełny opis przepływu turbulentnego (w obszarze D, przy ustalonej gometrii jego granic), sprowadza się do określenia miary probabilistycznej $P(d\Omega)$ na jego przestrzeni fazowej Ω, tzn. przestrzeni, której elementami są indywidualne realizacje, charakteryzujących ten przepływ, losowych pól termodynamicznych. Oznacza to, że każda konkretna realizacja takiego pola jest traktowana jako "przedstawiciel" wybrany ze "statystycznego zespołu wszystkich możliwych pól", scharakteryzowanego miarą probabilistyczną zadaną na zbiorze funkcji $F = \{\psi\colon \psi = \psi(M),\ M = (x,t) \in D \times [0, T]\}$, spełniających określone zależności kinematyczne i dynamiczne, wynikające z równań termohydromechaniki [1,4].

Rozkłady prawdopodobieństwa $P(d\Omega)$ są jednoznacznie wyznaczone przez funkcjonały charakterystyczne (FC). FC losowego pola $\psi(x,t)$ nazywamy wielkość [1]:

$$
\begin{aligned}
[\eta(x,t)] &= \langle \exp[i\textstyle\int_V \eta(x,t)\psi(x,t)dxdt] \rangle = \\
&= \int_V \exp[i\textstyle\int \eta(x,t)\psi(x,t)dxdt]P(d\Omega),
\end{aligned} \tag{1}
$$

gdzie: V - oznacza objętość obszaru D zajętego przez pole ψ (ciecz),

$\eta(x,t)$ - jest dowolną funkcją wektorową o nośniku zwartym w $D \times [0, T]$.

Wartości FC Φ, określone na funkcjach typu $\eta(x,t) = \sum \eta_n \delta(x-x_n)\delta(t-t_n)$ ($n \in \langle 1; N \rangle$, δ - jest funkcją Diraca), pokrywają się z funkcjami charakterystycznymi skończenie wymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa dla wartości pola $\psi(x,t)$ na zbiorze $M = \{M_1 = (x_1,t_1),\ldots,M_N = (x_N,t_N) \in D \times [0, T]\}$.

Znajomość FC (1) daje możliwość określania, przy wykorzystaniu różniczkowania funkcjo- nalnego, momentów statystycznych dowolnych rzędów pola ψ w różnych konfigu- racjach punktów zbioru M.

FC nie jest obiektem specyficznym tylko dla hydrodynamiki. W fizyce statystycznej FC odpowiada tzw. funkcjonał tworzący [5], mający sens sumy statystycznej w polu zewnętrznym, a w teorii kwantowej odpowiedni funkcjonał pokrywa się z kwantowomechaniczną amplitudą przejścia próżnia-próżnia w obecności źródeł zewnętrznych [6]. Te analogie pozwalają wykorzystać w opisie turbulencji metody matematyczne rozwinięte w teorii pola i statystyce kwantowej [7].

Celem niniejszej pracy jest zaprezentowanie możliwości, jakie daje w tym względzie przedstawienie FC pola ψ w postaci podwójnej całki kontynualnej. Obiektem naszego zainteresowania jest turbulentny przepływ cieczy znajdującej się w polu zadanych, losowych sił zewnętrznych, modelowany równaniami Naviera-Stokesa (NS). Inne wykorzystanie całek funkcyjnych oraz funkcjonałów charakterystycznych w problemach turbulencji można znaleźć m. in. w pracach [8,9].

2. METODA CAŁEK FUNKCYJNYCH

Rozważymy przepływ nieściśliwej, lepkiej cieczy, opisywany układem równań NS, wykorzystując notację Teodorovicha [7] (zob. także [10]):

$$
\begin{aligned}
-L_\alpha(M_1,[\psi]) + X_\alpha(M_1) + \hat{\eta}_\alpha(M_1) &= -L^{(0)}_{\alpha\beta}(M_1M_2)\psi_\beta(M_2)- \\
-\tfrac{1}{2}V_{\alpha\beta\gamma}(M_1|M_2M_3)\psi_\beta(M_2)\psi_\gamma(M_3)&+X_\alpha(M_1)+\hat{\eta}_\alpha(M_1)=0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

gdzie zastosowaliśmy uogólnioną umowę sumacyjną Einsteina - po powtarzających
się indeksach oraz współrzędnych dokonujemy - odpowiednio - sumowania i całkowania, $\psi_\alpha = \{\psi_o,\psi_i\} = \{p,v_i\}$ - jest wektorem stanu cieczy (p i v_i - oznaczają ciśnienie i prędkość cieczy, $i = 1,2,3$), $L^{(0)}_{\alpha\beta}$ - jest liniową częścią operatora NS określoną następująco:

$$
L^{(0)}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_j^{(M_1)} \\ \partial_i^{(M_1)} & (\partial_t^{(M_1)} - \nu\Delta^{(M_1)})\delta_{ij} \end{bmatrix}\delta(M_1-M_2),
\tag{3}
$$

gdzie: δ_{ij} - jest deltą Kroneckera, ν - współczynnikiem lepkości kinematycznej,

$V_{\alpha\beta\gamma}(M_1|M_2M_3)$ - jest nieliniową częścią operatora NS o składowych:

$$V_{\alpha\beta\gamma}(M_1|M_2M_3) = -\left[\delta_{1k}\partial_j^{(M_3)} + \delta_{1j}\partial_k^{(M_2)}\right]\delta(M_1-M_2)\delta(M_1-M_3), \tag{4}$$

$X_\alpha(M_1) = (X_0, X_1)$, $\hat{\eta}_\alpha(M_1) = (\hat{\eta}_0, \hat{\eta}_1)$ - są - odpowiednio - zadanymi gęstościami losowych i zdeterminowanych źródeł zewnętrznych.

FC pola ψ, którego realizacje spełniają układ (2)-(4), zależy również od pola $\hat{\eta}$, przy czym pochodne $\delta\Phi/\delta\hat{\eta}$ mają sens funkcji Greena układu [7,10]. Zgodnie z definicją FC (1) oraz określeniem wartości średniej, możemy napisać:

$$\Phi[\eta,\hat{\eta}] = \langle e^{i\eta\psi}\rangle = \int D[\psi]P[\psi,\hat{\eta}]e^{i\eta\psi}, \tag{5}$$

gdzie:

$P[\psi,\hat{\eta}]$ - jest funkcjonałem gęstości prawdopodobieństwa stanu ψ przy występowaniu pola zewnętrznego $\hat{\eta}$,

$D[\psi]$ - oznacza element objętości w przestrzeni funkcyjnej (miarę całkową Wienera); wykorzystano także umowę sumacyjną.

Funkcjonał $P[\psi,\hat{\eta}]$ może być wyrażony przez wartość średnią funkcjonału $\tilde{\delta}$ - - Diraca względem indywidualnych realizacji pola $\tilde{\psi}[\hat{\eta},X]$, spełniających układ (2)-(4):

$$P[\psi,\hat{\eta}] = \langle\tilde{\delta}\{\psi - \tilde{\psi}[\hat{\eta},X]\}\rangle \tag{6}$$

Wykorzystując własności funkcjonału $\tilde{\delta}$-Diraca otrzymamy [11]:

$$\tilde{\delta}\{\psi - \tilde{\psi}[\hat{\eta},X] = |\delta L[\psi]/\delta\psi|\ \tilde{\delta}\{-L[\psi] + X + \hat{\eta}\}, \tag{7}$$

$$\tilde{\delta}\{-L[\psi] + X + \hat{\eta}\} = \int D[\hat{\psi}]e^{i\hat{\psi}\{-L[\psi] + X + \hat{\eta}\}}. \tag{8}$$

Uwzględniając powyższe zależności w wyrażeniu dla funkcjonału $P[\psi,\hat{\eta}]$ oraz

zakładając, że siły losowe mają rozkład normalny, otrzymamy ostatecznie następujące wyrażenie dla FC $\Phi[\eta,\hat{\eta}]$ pola ψ [7]:

$$\Phi[\eta,\hat{\eta}] = \iint D[\psi]D[\hat{\psi}]e^{iS[\psi,\hat{\psi}] + i\eta\psi + i\hat{\eta}\hat{\psi}}, \tag{9}$$

gdzie:

$$S[\psi,\hat{\psi}] = -\hat{\psi}_\alpha(M_1)L_\alpha(M_1,[\psi]) + \frac{1}{2}\hat{\psi}_\alpha(M_1)B_{\alpha\beta}(M_1M_2)\psi_\beta(M_2), \tag{10}$$

przy czym $B_{\alpha\beta}(M_1M_2)$ - jest dwupunktową funkcją korelacyjną gaussowskiego pola sił zewnętrznych oraz uwzględniliśmy, że $|\delta L[\psi]/\delta\psi| = |I| = 1$ (zob. [12]).

3. ZAKOŃCZENIE

FC (1), zapisany w postaci (9) - (10), pokrywa się z funkcjonałem tworzącym kwantowej teorii dwóch pól ψ, $\hat{\psi}$, określonej działaniem $S[\psi,\hat{\psi}]$ i tym samym statystyczny problem dla układu NS, w obecności sił losowych, jest równoważny z zagadnieniem pewnej teorii pola [7,10,12]. Sformułowanie statystycznej dynamiki klasycznej zmiennej losowej ψ opisywanej nieliniowymi równaniami, przez wprowadzenie drugiego, pomocniczego pola $\hat{\psi}$ nie komutującego z nim, stanowi istotę tzw. formalizmu MSR [10] i umożliwia doprowadzenie do postaci hamiltonowskiej równań, które nie są ekstremalami pewnego zagadnienia wariacyjnego. Przedstawione ujęcie problemu turbulencji pozwala wykorzystać aparat matematyczny, opracowany dla analizy pól kwantowych wraz z techniką diagramów oraz metodą grupy renormalizacji. Dokładniej mówiąc, reprezentacja FC (1) w postaci (9) - (10) stanowi podstawę konstrukcji szeregu teorii zaburzeń dla różnych wielkości fizycznych (momentów korelacyjnych), a metoda grupy renormalizacji umożliwia jego przebudowę i przesumowanie pewnego nieskończonego podciągu tego szeregu, co jest istotne dla zrozumienia fizyki silnych nieliniowych współoddziaływań w wielomodowym układzie dynamicznym [7]. Z tego punktu widzenia, statystyczną teorię turbulencji można traktować jako "renormalizowalną teorię pola".

Zauważmy także, że praktycznie wszystkie sposoby otrzymania przybliżonych, skończonych układów równań w teorii turbulencji prowadzą do równań nieliniowych, naruszając <u>liniowość</u> statystycznej hydrodynamiki sformułowanej przy wykorzystaniu pojęcia FC pola. Jest to konsekwencją tego, że w układach znajdujących się w statystycznie nierównowagowych stanach, opisywanych niegaussowskimi miarami probabilistycznymi, żaden skończony zbiór momentów statystycznych czy skończenie wymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa nie ewoluuje samodzielnie [13].

LITERATURA

[1] Monin A. S., Jaglom A. M.: Statisticzeskaja gidromechanika. T. 1. Nauka, Moskwa 1965.

[2] Dorodnicyn A. A.: Numeryczne metody rozwiązywania równań rządzących ruchem płynu lepkiego. W: Metody numeryczne w mechanice płynów. Praca zbiorowa. Ossolineum, Wrocław-Warszawa-Kraków 1969.

[3] Monin A. S.: Tieoreticzeskije osnowy geofiziczeskoj gidromechaniki. Gidrometeoizdat, Leningrad 1988.

[4] Stanisić M. M.: The Mathematical Theory of Turbulence. Wyd. II. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-London-Paris-Tokyo 1988.

[5] Bogolubow N. N.: Problemy dinamiczeskoj tieorii w statisticzeskoj fizikie. W: Bogolubow N. N.: Izbrannyje trudy po statisticzeskoj fizikie. Izd. Mosk. Uniw., Moskwa 1979.

[6] Schwinger J.: On the Green's functions of quantized fields. "Proceedings National Academy of Sciences USA", p. 1, v. 37, 1951, 452-458.

[7] Teodorowicz E. V.: Primienienije mietodow tieorii pola i rienormgruppy dla opisanija razwitoj turbulentnosti. "Uspiechy Miechaniki.", t. 13, wyp. 1, 1990, s. 81-121.

[8] Icha A.: Variational principle for the turbulent diffusion equation. "Journal of Physics A. Math. Gen. 22, 1989, L827-L831.

[9] Icha A.: An application of first integrals method in magnetic diffusion problem. "Journal of Mathematical Physics", v. 33 (3), 1992, 1216-1220.

[10] Martin P. C., Sigga E. D., Rose H. A.: Statistical dynamics of classical systems. "Physical Review A", v. 8, 1973, s. 423-437.

[11] Madielung E.: Matematiczeskij apparat fiziki. Wyd. II. Nauka, Moskwa 1968 (tłum. z j. niem.).

[12] De Dominicis C., Peliti L.: Field theory renormalization and critical dynamics above Tc: Helium, antiferromagnets and liquid gas systems. "Physical Review B", v. 18, 1, 1978, s. 353-376.

[13] Monin A. S.: Geofiziczeskaja turbulentnost. "Uspiechy Matiematiczeskich Nauk", t. 38, vyp. 4(232), 1983, s. 113-131.

Recenzent: Prof. Ryszard Gryboś

Wpłynęło do Redakcji dnia 06.11.1992

Abstract

Among the most important problems of modern classical physics is that of the adequate description of turbulent phenomena. Beginning with the end of last century, this phenomenon was mainly described in a frame of experimental physics. The theory of turbulence made no real progress until Kolomogorov's research, which introduced a statistical approach to turbulence.

It is well known that a basic assumption of turbulence theory is that the statistical dynamics of a flow is completely determined by the probability measure P(dΩ) associated with random thermohydrodynamic fields whose realizations satisfy the suitable transport equations (2)-(4) for prescribed boundary conditions. All multipoint correlation tensors are contained in the complex valued Fourier transform of the probability measure P(dΩ), the space-

-time characteristic functional Φ (1). Thus, an explicit determination of the space-time characteristic functional (1) of hydrodynamical fields, which incorporates all the finite-dimensional statistical observables associated with a turbulent flow, constitutes a central problem for the deductive theory of turbulence.

The last twenty years have seen the introduction into turbulence theory of a number of new ideas and methods which are more familiar in the context of quantum field theory and statistical mechanics and have little in common with "traditional" fluid mechanics. A well known formal analogy exists between the functional approach in the theory of turbulence and the functional methods in the field theory and quantum statistics. In a paper Martin et al (1973) have developed a new formalism for the discussion of the statistical dynamics of classical random variable that satisfies a nonlinear equation of motion. The self-consistent equations are developed by introducing a second field that does non commute with the random variable. The application of this method to classical macroscopic systems (turbulent flows), enables path integral representation (9)-(10) to be written for the space-time characteristic functional (1). This functional integral representation can be derived directly from the Navier-Stokes equations (2)-(4) without reffering to the suitable functional differential equations. In this formulation a consistent approach may be proposed for describing fully developed turbulence within the framework of the diagram methods in perturbation theory and the renormalization group method. Clearly much work remains to be done in further elucidating the theory and in performing calculations for specific problems.