ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1993

Seria: MECHANIKA z. 113 Nr kol. 1198

Jacek JACKIEWICZ
ATR, Bydgoszcz

Wiesław OSTACHOWICZ
Instytut Maszyn Przepływowych PAN, Gdańsk.

ROZWIĄZYWANIE PŁASKICH PĘKNIĘĆ METODĄ RÓWNAŃ CAŁKOWYCH

Streszczenie. W artykule przedstawiono, wykorzystując równania całkowe, metodę rozwiązywania prostych i zagiętych płaskich pęknięć w mamateriale sprężystym (dla I i II podstawowego przypadku). Wyniki obliczeń numerycznych zostały użyte w celu przedstawienia skuteczności opisywanej metody.

AN INTEGRAL EQUATION METHOD FOR SOLVING PLANE CRACK PROBLEMS

Summary. An integral equation method for straight or kinked crack problems (modes I and II) in plane elasticity is presented in this paper. Numerical examination is used to demonstrate the efficiency ofthe described technique.

РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ ТРЕЩИН МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИИ

Резюме. В статье рассмотрен при помощи интегральных уравнений метод решения прямых и изгибных плоских трещин (первого и второго случая) вэластьных материалах. Для представления эффективности предлагаемого способа исползуются резултаты численного анализа.

1. WSTĘP

Równanie całkowe dla krzywoliniowych płaskich pęknięć, przedstawionych na rysunku 1, może być zapisane w następującej ogólnej postaci

$$\int_{C_L} K(t,t_o)\xi(t)dt = F(t_o) + C \tag{1.1}$$

gdzie : $K(t,t_0)$ - dwupunktowa całkowa funkcja wpływu,

$F(t_0)$ - prawostronne wyrażenie równania całkowego, określone wzdłuż linii pęknięcia C_L,

$\xi(t)$ - nieznana funkcja, którą należy wyznaczyć,

$\mathbb{C}$ - stała całkowania.

W tablicy 1 zostały przedstawione trzy możliwości sformułowania równania całkowego (1.1). Pierwsze równanie całkowe typu *RC1* jest równaniem, w którym dwupunktowa całkowa funkcja wpływu $K(t,t_0)$ posiada rząd osobliwości Cauchego *O(1/R)*. Drugie równanie całkowe typu *RC2* jest opisane w pracy Cheunga i Chena [2]. Zaletą tego równania jest jego niższy rząd osobliwości *O(ln(r))* dla dwupunktowej całkowej funkcji wpływu $K(t,t_0)$, co jest istotne ze względu na dokładność obliczeń numerycznych. Z kolei trzecie równanie typu *RC3* [1] spełnia bezpośrednio warunek jednoznaczności odkształceń, dlatego też nie ma konieczności budowania dodatkowego równania całkowego dla funkcji $\xi(t)$ wzdłuż zamkniętej linii pęknięcia.

Tablica 1

Równania całkowe dla krzywoliniowych płaskich pęknięć

Typ równania całkowego	$\xi(t)$	$F(t\ )$	$\mathbb{C}$	Warunek jednoznaczności dla odkształceń
RC1	funkcja dyslokacji wzdłuż linii pęknięcia	funkcja obciążenia liniowego wzdłuż linii pęknięcia	stała $\mathbb{C}$ nie jest wymagana	powinien być spełniony
RC2	taka, jak dla równania typu *A*	funkcja siły wypadkowej wzdłuż linii pęknięcia	stała $\mathbb{C}$ jest wymagana	taki, jak dla równania typu *A*
RC3	funkcja skoku przemieszczeń wzdłuż linii pęknięcia	taka, jak dla równania typu *A*	stała $\mathbb{C}$ jest wymagana	jest spełniony bezpośrednio

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Ze względu na dokładność obliczeń wybrano do dalszych rozważań równanie całkowe typu *RC2*. Rozwiązując problem płaskich pęknięć w warunkach potencjałów zespolonych wygodnie jest wykorzystać sformułowania Muskhelishviliego [5]. Wyrażona przez funkcje harmoniczne oraz zespolone wypadkowa

siła $F_x + iF_y$, działająca na brzegu AB (rys. 2), przyjmuje postać:

$$F_x + iF_y = \left[\frac{\partial\phi}{\partial y} - i\frac{\partial\phi}{\partial x} \right]_A^B = -i\left[\frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\phi}{\partial y} \right]_A^B \tag{2.1}$$

gdzie: ϕ - funkcja harmoniczna.

Wykorzystując związek

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\phi}{\partial y} = \psi(z) + z\overline{\psi}'(\overline{z}) + \overline{\chi}(\overline{z}) \tag{2.2}$$

równanie (2.1) może być określone przez następujące zależności

$$F_x + iF_y = -i\left[\psi(z) + z\overline{\psi}'(\overline{z}) + \overline{\chi}(\overline{z})\right]_A^B = -i\left[\psi(z) + z\overline{\psi}'(\overline{z}) + \overline{\chi}(\overline{z})\right] + \mathbb{C}\ , \tag{2.3}$$

gdzie : $\left.\begin{aligned} \psi(z) &= H\log(z-t) \\ \chi(z) &= \overline{H}\log(z-t) - \frac{H\overline{t}}{z-t} \end{aligned}\right\}$ - potencjały zespolone,

H - dyslokacja umieszczona w punkcie z = t (wartość zespolona).

Jeżeli rozpatrzymy rozkład gęstości dyslokacji $\mu(s)$ wzdłuż linii pęknięcia C_L (0<s<1), za pomocą związku

$$\frac{\partial}{\partial s}(H)\,ds = \mu(s)\,ds\ ,\ \text{gdzie } \mu(s) = \mu_1(s) + i\mu_2(s), \tag{2.4}$$

to potencjały zespolone, określone przez zależności (2.3), przyjmą postać

$$\begin{gathered} \psi(z) = \int_0^1 \mu(s)\log(z-t)\,ds\ ,\quad \psi'(z) = \int_0^1 \frac{\mu(s)ds}{z-t}\ , \\ \chi(z) = \int_0^1 \overline{\mu(s)}\log(z-t)\,ds - \int_0^1 \frac{\overline{t}\mu(s)}{z-t}\,ds\ . \end{gathered} \tag{2.5}$$

Uwzględniając równania potencjałów zespolonych (2.5), składowe siły wypadkowej działającej wzdłuż linii pęknięcia, w przypadku gdy gęstości dyslokacji $\mu(s)$ umieszczone są wzdłuż tej linii, a zmienna z t_0^+ lub z t_0^-, przyjmują ostatecznie postać

$$\begin{aligned} F_x(t_0) = &\int_0^1 2\log(r(t,t_0))\mu_2(s)ds + \\ &+\int_0^1 \left[\mu_1(s)\sin(2\theta(t,t_0)) - \mu_2(s)\cos(2\theta(t,t_0))\right]ds + \mathrm{Im}(\mathbb{C})\ , \\ F_y(t_0) = &-\int_0^1 2\log(r(t,t_0))\mu_1(s)ds + \\ &-\int_0^1 \left[\mu_1(s)\cos(2\theta(t,t_0)) + \mu_2(s)\sin(2\theta(t,t_0))\right]ds + \mathrm{Re}(\mathbb{C})\ , \end{aligned} \tag{2.6}$$

gdzie: $t-t_0 = r(t,t_0)\,e^{i\theta(t,t_0)}$, a górne indeksy + i - oznaczają odpowiednio górną i dolną linię pęknięcia.

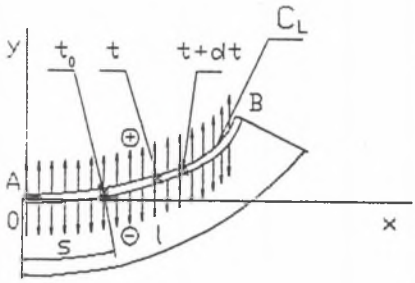
Warunek jednoznaczności odkształceń dla zamkniętej linii pęknięcia wymaga spełnienia dodatkowego równania

$$\int_0^1 \mu(s)\, ds = 0 \,. \tag{2.7}$$

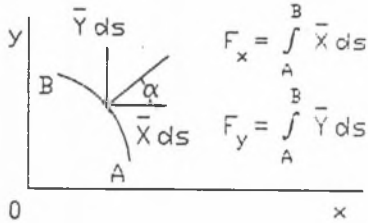
3. FUNKCJE KSZTAŁTU ELEMENTÓW OSOBLIWYCH

Linia pęknięcia jest dyskretyzowana za pomocą N_b liniowych elementów z N_{b+1} węzłami. Dla każdego prostoliniowego odcinka elementu przyjęto lokalny układ współrzędnych, w którym zmienna s jest styczną, a zmienna n normalną do linii pęknięcia. Funkcja kształtu dla gęstości dyslokacji jednego z elementów zawierających wierzchołek pęknięcia ma postać:

$$\mu_i = \sqrt{\frac{2}{1+\eta}} \left[\frac{1-\eta}{2} \mu_{i,1} + \frac{1+\eta}{2} \mu_{i,2} \right] , \text{ gdzie } |\eta| \le 1 \,. \tag{3.1}$$



Rys. 1. Krzywoliniowe pęknięcie w nieskończonej tarczy
Fig. 1. A curve crack in an infinite plate



Rys. 2. Składowe siły wypadkowej, działającej na brzegu AB
Fig. 2. The traction-rate force on a boundary AB

4. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE I WNIOSKI

Tablica 2 przedstawia zestawienie wartości współczynników intensywności naprężeń w wierzchołku prostoliniowego pęknięcia o długości l=2a, umieszczonego w nieskończonej tarczy. Wzdłuż linii tego pęknięcia działa jednorodne, jednostkowe ciśnienie p=1. Linia pęknięcia jest podzielona na N_b=10 lub N_b=20 liniowych elementów o jednakowej długości. Uzyskane wartości współ-

czynników intensywności naprężeń K_I są porównane z wynikiem rozwiązania analitycznego, które dla tego typu pęknięcia jest możliwe do otrzymania, oraz z wynikami uzyskanymi przez Y. K. Cheunga i Y. Z. Chena [2].

Tablica 2

Wartości współczynników intensywności naprężeń w wierzchołku prostoliniowego pęknięcia umieszczonego w nieskończonej tarczy

N_b	K_I	K_I [2]	Rozw. analityczne
10	$1,0004\sqrt{\Pi}$	$1,0261\sqrt{\Pi}$	$\sqrt{\Pi}$
20	$0,9996\sqrt{\Pi}$	$1,0144\sqrt{\Pi}$	$\sqrt{\Pi}$

W tablicy 3 są podane wartości współczynników intensywności naprężeń w wierzchołkach zagiętych linii pęknięć, których geometria jest określona w pracach [4,8]. Wartości wyznaczonych współczynników intensywności naprężeń są porównane z wynikami otrzymanymi przez K. K. Lo, W. Zanga i P. Gudmundsona. Dla wszystkich rozpatrywanych przypadków pęknięć otrzymano dobrą zgodność wyników.

Tablica 3

Wartości współczynników intensywności naprężeń w wierzchołkach zagiętych linii pęknięć, składających się z dwóch odcinków

α	a/l	K_I	K_I [8]	K_I [4]	K_I	K_{II} [8]	K_{II} [4]
15°	1	1,147	1,154	1,15	0,318	0,318	0,32
15°	10	0,979	0,983	0,98	0,195	0,196	0,20
15°	100	0,965	0,970	0,97	0,148	0,151	0,15
45°	1	0,656	0,664	0,67	0,719	0,722	0,72
45°	10	0,678	0,681	0,68	0,464	0,467	0,47
45°	100	0,744	0,749	0,75	0,364	0,372	0,37
75°	1	0,069	0,070	0,07	0,642	0,651	0,65
75°	10	0,271	0,270	0,28	0,471	0,476	0,48
75°	100	0,427	0,429	0,42	0,396	0,413	0,41

Zastosowana procedura całkowania numerycznego [7] umożliwia dowolny dobór żądanej funkcji kształtu dla elementów osobliwych, co jest istotne w przypadku modelowania pęknięć dla zakresu sprężysto-plastycznych właściwości materiału. Niższy rząd osobliwości dwupunktowej całkowej funkcji wpływu i elementy osobliwe w wierzchołkach pęknięcia zapewniają odpowiednią dokładność wyników przy uniknięciu konieczności drobiazgowej dyskretyzacji linii pęknięcia. Metoda równań całkowych dla sił wypadkowych i gęstości dyslokacji może być wykorzystana wraz z metodą elementów brzegowych [6] do modelowania

dowolnych płaskich pęknięć dla pierwszego i drugiego podstawowego przypadku rozwoju pęknięcia G. R. Irwina.

LITERATURA

[1] Chen Y.Z.: New Singular Integral Equation for Curve Crack Problem in Plane Elasticity. Int. Journal of Fracture 1991, Vol.49, s.R39-R43.

[2] Cheung Y.K., Chen Y.Z.: New Integral Equation for Plane Elasticity Crack Problems. Theoretical and Applied Fracture Mechanics 1987, Vol.7, s.177-184.

[3] Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S.: Numerical Solution of Singular Integral Equations. Mechanics of Fracture, Vol.1, Sih G.C. (ed.), Noordhoff, Leyden 1973, s.365-425.

[4] Lo K.K.: Analysis of Branched Cracks. Journal of Applied Mechanics 1978, Vol.45, s.797-802.

[5] Muskhelishvili N.I.: Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Noordhoff, Groningen 1953.

[6] Ostachowicz W., Jackiewicz J.: Modelowanie propagacji pęknięć zmęczeniowych elementami brzegowymi. ZN Pol. Śl., ser. Mechanika, z.107, Gliwice 1992, s.311-318.

[7] Telles J.C.F.: A Self-adaptive Co-ordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals. Int. Journal for Numerical Methods in Engineering 1987, Vol.24, s.959-973.

[8] Zang W.L., Gudmundson P.: An Inegral Equation Method for Pice-wise Smooth Cracks in an Elastic Half-plane. Engineering Fracture Mechanics 1989, Vol.32, s.889-897.

Recenzent: Prof. Eugeniusz Świtoński

Wpłynęło do Redakcji dnia 07.11.1992

Abstract

The plane smooth or kinked crack problems (modes I and II) of linear elasticity is considered in this paper. Three possibilities of formulating the integral equations for crack problems are listed in Table 1. The problems of crack modelling are solved by an application of the integral equations (2.6) for the resultant forces along the crack line. A self-adaptive co-ordinate third degree polynomial transformation [7] is used to compute singular or nearly singular integrals. In Table 2 and 3, some representative results of the stress intensity factors at crack tips are presented with comparison to those obtained in ref. [2,4,8]. The integral equations for the resultant forces along the crack line utilized in this method can be coupled to the direct boundary element method [6] for treatment of cracks in plane finite bodies.