

Anatoliusz JAKOVLUK, Michał CZECH

Katedra Mechaniki Stosowanej
Politechnika Białostocka

PORÓWNANIE RÓŻNYCH MODELI RUCHU BRYŁY Z WIĘZAMI NIEHOLONOMICZNYMI

Streszczenie. Przedstawiono porównanie pracochłonności modelowania ruchu ciała sztywnego z więzami nieholonomicznymi w polu potencjalnym metodami: 1) Routha z mnożnikami Lagrange'a, 2) Maggiego, 3) Appella, 4) Voronca, 5) Čaplygina, 6) równaniami kanonicznymi z mnożnikami. Postuluje się następującą kolejność pracochłonności metod: 1, 5, 3, 6, 2 i 4.

COMPARISON OF DIFFERENT MODELS OF SOLID MOTION WITH INHOLONOMIC CONSTRAINS

Summary. In the paper was presented the comparison of labour consumption of the rigid body motion modelling with inholonomic constrains in the field of gravity of the following methods: 1) Routh's with Lagrange multipliers, 2) Maggi's, 3) Appell's, 4) Voronec's, 5) Chaplygin's and 6) canonical equations with multipliers. The following sequence of the labour consumption methods were postulated: 1st, 5th, 3rd, 6st, 2nd, and 4th.

СРАВНЕНИЕ РАЗНЫХ МОДЕЛЕЙ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА С НЕГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ

Резюме. Представлено сравнение трудоемкости моделирования движения жесткого тела в потенциальном поле с неголономными связями следующими методами: 1) Рауса с множителями Лагранжа, 2) Магги, 3) Аппеля 4) Воронца, 5) Чаплыгина, 6) каноническими уравнениями с множителями. Предлагается следующую последовательность трудоемкости методов: 1-ая, 5-ая, 3-ья, 6-ая, 2-ая и 4-ая.

1. WPROWADZENIE

Do opisu ruchu układu materialnego z więzami nieholonomicznymi istnieje szereg modeli matematycznych, tj. równania ruchu: 1) Routha z mnożnikami

Lagrange'a, 2) Maggiego, 3) Appella, 4) Voronca, 5) Čaplygina, 6) kanoniczne z mnożnikami. Istnieje problem doboru najefektywniejszego modelu matematycznego ruchu ciała materialnego z więzami nieholonomicznymi. Istnieją dostępne w literaturze przykłady porównania opisu kilkoma metodami, np. N.N. Buchgolec [1], R. Gutowski [2], A. Jakowluk, A.T. Skajbęda [3].

Celem niniejszej pracy jest porównanie efektywności wyszczególnionych wyżej modeli matematycznych na przykładzie ruchu łyżwy po lodzie.

2. FORMUŁOWANIE RÓWNAŃ RUCHU WEDŁUG RÓŻNYCH MODELI

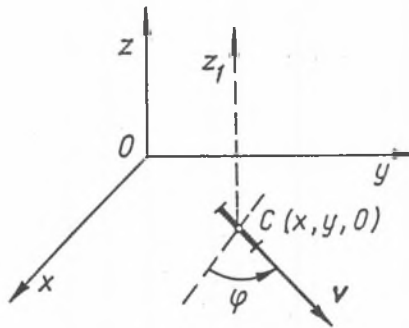
2.1. Sformułowanie zadania

Łyżwiarz porusza się na jednej łyżwie po poziomej płaszczyźnie lodu bez uwzględnienia tarcia. Łyżwę modeluje się w postaci cienkiego pręta, o prędkości \vec{v} (rys.1). Sformułować równania różniczkowe ruchu różnymi metodami.

Z rysunku wynikają następujące równania więzów:

$$z = 0, \quad y = x \operatorname{tg} \varphi \quad \text{lub} \quad x \operatorname{tg} \varphi - y = 0 \quad (1)$$

Więź (1)₁ jest holonomiczny, zaś więź (1)₂ ma budowę nieholonomiczną.



Rys.1. Łyżwa C w ruchu po płaszczyźnie xy

2.2. Równania ruchu Routha z mnożnikami Lagrange'a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{\beta=1}^1 \lambda_{\beta} b_{\beta j}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2)$$

uzupełniane są równaniami więzów nieholonomicznych

$$\sum_{j=1}^l b_{\beta j} (q_1, \dots, q_m, t) \dot{q}_j + b_{\beta} (q_1, \dots, q_m, t) = 0, \beta = 1, \dots, l. \quad (3)$$

W zadaniu $l = 1$, to z równań więzów (1)₂ i (3) wynika: $\lambda_{\beta} = \lambda_1$, $b_{11} = \operatorname{tg} \varphi$, $b_{12} = -1$. Stąd równania (2) będą:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x + \lambda_1 \operatorname{tg} \varphi; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_y - \lambda_1; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}. \quad (4)$$

Energia kinetyczna i potencjalna będą:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_{z_1 C} \dot{\varphi}^2, \quad U = \text{const}, \quad (5)$$

gdzie: m - masa łyżwiarza, $I_{z_1 C}$ - masowy moment bezwładności.

Wielkości do równań (5) będą:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_{z_1 C} \ddot{\varphi}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -Q_j = 0. \quad (6)$$

Równania (4), po uwzględnieniu (6), przyjmują postać:

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \operatorname{tg} \varphi, \quad m\ddot{y} = -\lambda_1, \quad I_{z_1 C} \ddot{\varphi} = 0 \text{ lub } m(\ddot{x} + \ddot{y} \operatorname{tg} \varphi) = 0, \quad I_{z_1 C} \ddot{\varphi} = 0. \quad (7)$$

2.3. Równania ruchu Maggiiego

$$\sum_{j=1}^m C_{1j} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) = \sum_{j=1}^m C_{1j} Q_j = \Phi_1, \quad C_{1j} = \partial \dot{q}_j / \partial \dot{e}_1, \quad \dot{e}_1 = \sum_{j=1}^m B_{1j} \dot{q}_j, \quad (8)$$

gdzie $i = 1, \dots, s_n$. W metodzie tej wprowadzono $s_n = m - 1$ parametrów niezależnych $\dot{e}_1, \dots, \dot{e}_{s_n}$, za pomocą których wyraża się $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m$, tj.

$$\dot{q}_j = \sum_{i=1}^{s_n} C_{1j} \dot{e}_i + C_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (9)$$

gdzie: C_{1j} , C_j - na ogół funkcje zmiennych q_1, \dots, q_m , t , zaś $\dot{e}_1, \dots, \dot{e}_{s_n}$ - parametry kinematyczne układu we współrzędnych q_1, \dots, q_m . Równania (8) i (9) tworzą $m + s_n = 2m - 1$ równań o $m + s_n$ niewiadomych $q_1, \dots, q_m, \dot{e}_1, \dots, \dot{e}_{s_n}$.

Więzy (1) w tym przypadku będą:

$$\dot{x} = \dot{e}_1, \quad \dot{\varphi} = \dot{e}_2, \quad \dot{y} = \dot{x} \operatorname{tg} \varphi = \dot{e}_1 \operatorname{tg} \varphi. \quad (10)$$

Równania (9), przy: $i = 1, \dots, s_n$ - liczbie stopni swobody układu nieholonomicznego, liczbie współrzędnych uogólnionych $j = 1, \dots, m$, gdzie $m = 3$ (x, y, z); liczbie więzów nieholonomicznych $l = 1$, ($s_n = m - l = 3 = 3 - 1 = 2$), mają postać:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 = \dot{x} &= C_{11} \dot{e}_1 + C_{21} \dot{e}_2 + C_1 = \dot{e}_1; & \dot{q}_2 = \dot{y} &= C_{12} \dot{e}_1 + C_{22} \dot{e}_2 + C_2 = \dot{e}_1 \operatorname{tg} \varphi, \\ \dot{q}_3 = \dot{\varphi} &= C_{13} \dot{e}_1 + C_{23} \dot{e}_2 + C_3 = \dot{e}_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Z równań (11) wynika, że C_{1j} i C_j mają wartości:

$$C_{11} = C_{23} = 1, \quad C_{12} = \operatorname{tg} \varphi, \quad C_{21} = C_1 = C_{22} = C_2 = C_{13} = C_3 = 0. \quad (12)$$

Równania (8) przy $Q_j = 0$ ($U = \text{const}$) przyjmują postać:

$$C_{11} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} \right) + C_{12} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} \right) + C_{13} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} - \frac{\partial T}{\partial q_3} \right) = 0. \quad (13)$$

$$C_{21} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} \right) + C_{22} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} \right) + C_{21} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} - \frac{\partial T}{\partial q_3} \right) = 0.$$

Uwzględniając we wzorach (13) wzory (6) oraz (11) i (12), otrzymuje się równania ruchu identyczne do równań (7), tj.

$$m(\ddot{x} + \ddot{y} \operatorname{tg} \varphi) = 0, \quad I_{z_1} \ddot{\varphi} = 0. \quad (14)$$

2.4. Równania ruchu Appella

$$\partial S / \partial \ddot{e}_i = \Gamma_i, \quad \Gamma_i = \sum_{j=1}^m Q_j C_{1j}, \quad i = 1, \dots, s_n, \quad (15)$$

gdzie Γ_i siły uogólnione Appella.

W przykładzie $s_n = 2$, wg (10) zaś energia przyspieszeń

$$S = \frac{1}{2} m a_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k a_{kr}^2, \quad (16)$$

gdzie:

$$a_{kr}^2 = a_{nkr}^2 + a_{tkr}^2 = (\omega^2 r_k)^2 + (c r_k)^2 = r_k^2 (\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2), \quad a_c^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2. \quad (a)$$

Uwzględniając (a) w (16) otrzymuje się

$$S = \frac{1}{2} m (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) + \frac{1}{2} (\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2) \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 = \frac{1}{2} m (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) + \frac{1}{2} I_{z_1 C} (\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2). \quad (b)$$

Z parametrów kinematycznych (10) wynika:

$$\ddot{e}_1 = \ddot{x}, \quad \ddot{e}_2 = \ddot{\varphi}, \quad \ddot{y} = e_1 \operatorname{tg} \varphi + e_1 \frac{1}{\cos^2 \varphi} e_2.$$

Stąd (b) przyjmie postać

$$S = \frac{1}{2} m (\ddot{e}_1^2 + \ddot{e}_2^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + 2 \ddot{e}_1 e_1 e_2 \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} + \frac{1}{\cos^4 \varphi} \ddot{e}_1^2 e_2^2) + \frac{1}{2} I_{z_1 C} (\dot{e}_2^4 + \ddot{e}_2^2). \quad (17)$$

Zgodnie z (6) $Q_j = 0$, $j = 1, 2, 3$, zaś zgodnie z (15) $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$.

Uwzględniając powyższe i (17) w (15) otrzymuje się:

$$m [\ddot{e}_1 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) + \dot{e}_1 \dot{e}_2 \sin \varphi / \cos^3 \varphi] = 0, \quad I_{z_1 C} \ddot{e}_2 = 0. \quad (18)$$

Równania (18) przyjmują postać (7) gdy wykorzystamy (10), tj.

$$\dot{e}_1 = \dot{x}, \quad \dot{e}_2 = \dot{\varphi}, \quad \ddot{y} = \ddot{x} \operatorname{tg} \varphi + \dot{x} \dot{\varphi} / \cos^2 \varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} = (\dot{y} \cos^2 \varphi - \dot{x} \operatorname{tg} \varphi \cos^2 \varphi) / x, \quad (c)$$

2.5. Równania ruchu Voronca

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \Theta}{\partial q_1} = Q_1 + \sum_{k=1}^1 \alpha_{k1} \left(Q_{s_n+k} + \frac{\partial \Theta}{\partial q_{s_n+k}} \right) + \sum_{k=1}^1 p_k \left(\sum_{j=1}^{s_n} A_{ij}^{(k)} \dot{q}_j \right) \quad (19)$$

$$\text{gdzie: } \dot{q}_{s_n+k} = \sum_{l=1}^{s_n} \alpha_{kl} \dot{q}_l, \quad \Theta(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{s_n}, t) =$$

$$= T(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t),$$

$$A_{ij}^{(k)} = \left(\frac{\partial \alpha_{k1}}{\partial q_j} + \sum_{\mu=1}^1 \frac{\partial \alpha_{k1}}{\partial q_{s_n+\mu}} \alpha_{\mu j} \right) - \left(\frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_1} + \sum_{\mu=1}^1 \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_{s_n+\mu}} \alpha_{\mu 1} \right), \quad (20)$$

$$p_k = \partial T / \partial \dot{q}_{s_n+k}, \quad i, j = 1, \dots, s_n; \quad k = 1, \dots, l.$$

W rozpatrywanym przykładzie $l = 1$, $s_n = 2$, $i, j = 1, 2$. Przy współrzędnych q_j : $\dot{q}_1 = \dot{x}$, $\dot{q}_2 = \dot{\varphi}$, $\dot{q}_3 = \dot{y}$ z (20) i (1)₂, otrzymuje się:

$$\dot{q}_3 = \dot{y} = \alpha_{11} \dot{q}_1 + \alpha_{12} \dot{q}_2, \quad \dot{q}_3 = \dot{y} = \dot{x} \operatorname{tg} \varphi = \dot{q}_1 \operatorname{tg} q_2, \quad (21)$$

Z porównania prawych stron związków (21), otrzymuje się:

$$\alpha_{11} = \operatorname{tg} q_2, \quad \alpha_{12} = 0. \quad (22)$$

Energia kinetyczna wg (5)₁, z uwzględnieniem związku (21), ma postać:

$$\Theta = T = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1^2 \operatorname{tg}^2 q_2) + \frac{1}{2} I_z C \dot{q}_2^2 = \frac{1}{2} m \dot{q}_1^2 / \cos^2 q_2 + \frac{1}{2} I_z C \dot{q}_2^2. \quad (23)$$

Współczynniki $A_{ij}^{(k)}$ wg (20)₂ mają wartości:

$$A_{11}^{(1)} = A_{22}^{(1)} = 0, \quad A_{12}^{(1)} = 1/\cos^2 q_2, \quad A_{21}^{(1)} = -1/\cos^2 q_2. \quad (24)$$

Wielkości do równań różniczkowych ruchu (19):

$$Q_1 = Q_{s_n+k} = 0; \quad \partial \Theta / \partial q_1 = \partial \Theta / \partial q_3 = 0, \quad \partial \Theta / \partial q_2 = m \dot{q}_1^2 \sin q_2 / \cos^3 q_2;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{d}{dt} (m \dot{q}_1 / \cos^2 q_2) = m \ddot{q}_1 / \cos^2 q_2 + 2 m \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin q_2 / \cos^3 q_2, \quad (25)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_2} = \frac{d}{dt} (I_z C \dot{q}_2) = I_z C \ddot{q}_2; \quad p_1 = \partial T / \partial \dot{q}_3 = m \dot{q}_3.$$

Podstawiając do (19) związki (24) i (25), otrzymuje się:

$$m \ddot{q}_1 / \cos^2 q_2 + 2 m \dot{q}_1 \dot{q}_2 \operatorname{tg} q_2 / \cos^2 q_2 = m \dot{q}_3 \dot{q}_2 / \cos^2 q_2,$$

$$I_z C \ddot{q}_2 - m \dot{q}_1^2 \operatorname{tg} q_2 / \cos^2 q_2 = -m \dot{q}_3 \dot{q}_1 / \cos^2 q_2 \quad (26)$$

Przechodząc w (26) z q_j na x, y, φ , przy uwzględnieniu (1)₂ i wyrażenia (c)₃ z

p.2.4, uzyskuje się równania identyczne do (7).

2.6. Równania ruchu Caplygina

Z założenia energia T i współczynniki α_{ki} , $k = 1, \dots, l$, $i = 1, \dots, s_n$ w równaniach więzów i siły uogólnione Q_j , $j = 1, \dots, m$, nie zależą od współrzędnych q_{s_n+k} . Przy tych założeniach równania Voronca przyjmują postać równań Caplygina

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Theta}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{k=1}^l \alpha_{ki} Q_{s_n+k} + \sum_{k=1}^l p_k \sum_{j=1}^{s_n} C_{ij}^{(k)} \dot{q}_j, \quad i = 1, \dots, s_n. \quad (27)$$

$$C_{ij}^{(k)} = \partial \alpha_{ki} / \partial q_j - \partial \alpha_{kj} / \partial q_i, \quad k = 1, \dots, l.$$

W rozpatrywanym zadaniu: $l = 1$, $s_n = 2$, $i, j = 1, 2$. Wartości pomocnicze będą:

a) $\alpha_{11} = \text{tg } q_2$, $\alpha_{12} = 0$, t.j. wg wzoru (22); b) $C_{ij}^{(1)} : C_{11}^{(1)} = C_{22}^{(1)} = 0$, $C_{12}^{(1)} = 1/\cos^2 q_2$, $C_{21}^{(1)} = -1/\cos^2 q_2$; c) inne wartości pomocnicze są identyczne z równaniami Voronca (bez $\partial \Theta / \partial q_3$). Z równań (27) otrzymuje się identyczne równania do (26), które można sprowadzić do (7).

2.7. Równania kanoniczne ruchu układów nieholonomicznych z mnożnikami

$$\dot{q}_j = \partial H / \partial p_j, \quad \dot{p}_j = -\partial H / \partial q_j + \sum_{\beta=1}^l \lambda_\beta b_{\beta j}, \quad (p_j = -\partial L / \partial \dot{q}_j), \quad j = 1, \dots, m, \quad (28)$$

które w liczbie $2m$, wraz z l równaniami więzów nieholonomicznych (3), tworzą układ $2m + 1$ równań z $2m + 1$ niewiadomymi $q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m, \lambda_1, \dots, \lambda_l$.

W rozpatrywanym przykładzie $l = 1$, $m = 3$ przyjęto: $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = \varphi$. Energia T , U i funkcja Lagrange'a L mają postać

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} I_z C \dot{q}_3^2, \quad U = \text{const.} = C, \quad L = T - U. \quad (29)$$

Funkcja Hamiltona i równanie więzu nieholonomicznego (1)₂ oraz (3) będą:

$$H(q_j, p_j, t) = \sum p_j \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j, t) = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 + p_3 \dot{q}_3 -$$

$$-\frac{1}{2} m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2} I_{z_1 C} \dot{q}_3^2 + C \dots \quad (30)$$

$$\dot{q}_1 \operatorname{tg} q_3 - \dot{q}_2 = 0, \quad b_{11} \dot{q}_1 + b_{12} \dot{q}_2 + b_{13} \dot{q}_3 + b_1 = 0.$$

Porównując (30)₂ i (30)₃, otrzymuje się współczynniki:

$$b_{11} = \operatorname{tg} q_3, \quad b_{12} = -1, \quad b_{13} = 0, \quad b_1 = 0. \quad (31)$$

Dla wyrugowania z hamiltoniana (30) prędkości \dot{q}_j oblicza się impulsy uogólnione p_j z (29), tj.:

$$p_1 = \partial L / \partial \dot{q}_1 = m \dot{q}_1, \quad p_2 = \partial L / \partial \dot{q}_2 = m \dot{q}_2, \quad p_3 = \partial L / \partial \dot{q}_3 = I_{z_1 C} \dot{q}_3. \quad (a)$$

Podstawiając (a) do (30), otrzymuje się:

$$H(q_j, p_j, t) = \frac{1}{2} m (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2 I_{z_1 C}} p_3^2 + C. \quad (32)$$

Wartości pomocnicze do równań (28)_{1,2}, obliczane z (32):

$$\partial H / \partial p_1 = p_1 / m, \quad \partial H / \partial p_2 = p_2 / m, \quad \partial H / \partial p_3 = p_3 / I_{z_1 C}; \quad - \partial H / \partial q_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3). \quad (b)$$

Podstawiając (b) i (31) do (28)_{1,2}, otrzymuje się:

$$\dot{q}_1 = p_1 / m, \quad \dot{q}_2 = p_2 / m, \quad \dot{q}_3 = p_3 / I_{z_1 C}; \quad \dot{p}_1 = \lambda_1 \operatorname{tg} q_3, \quad \dot{p}_2 = -\lambda_1, \quad \dot{p}_3 = 0. \quad (33)$$

Rugując z (33) impulsy uogólnione p_j , mamy:

$$\ddot{q}_1 = \lambda_1 \operatorname{tg} q_3, \quad \ddot{q}_2 m = -\lambda_1, \quad \ddot{q}_3 I_{z_1 C} = 0. \quad (c)$$

Eliminując λ_1 i przechodząc z \ddot{q}_j na \ddot{x} , \ddot{y} , $\ddot{\varphi}$, otrzymujemy równania (7)

3. WNIOSKI

Wyda się, że podstawowym modelem układów nieholonomicznych są równania Routha z mnożnikami Lagrange'a, a następnie Čaplygina, Appella i kanoniczne z mnożnikami. Akcenty pracochłonności mogą ulec pewnej zmianie przy układzie niepotencjalnym.

LITERATURA

- [1] Buchgolec N. N.: Osnownoj kurs teoreticzeskoj mechaniki, cz.2. Izd. "Nauka", Moskwa 1972.

- [2] Gutowski R.: Mechanika analityczna. PWN, Warszawa 1971.
- [3] Jakowluk A., Skojbeda A.T., Mechanika teoretyczna i podstawy teorii mechanizmów i maszyn, Wyd. Pol. Białostockiej (złożone do druku 1992).

Recenzent: Prof. Eugeniusz Świtoński

Wpłynęło do Redakcji dnia 26. 10. 1992.

Abstract

For description of motion of the material system with inholonomical constrains are existing the following mathematical model: 1) Routh's with Lagrange multipliers, 2) Maggi's, 3) Appell's, 4) Voronec's, 5) Chaplygin's and 6) Canonical equations with multipliers. The problem of proper selection with point view of labor consumption of the mathematical model. The aim of paper is a comparison of effectiveness of the specified mathematical models on example of the skate motion on ice by omission of friction. The investigation showed the following sequence of the model efectiveness: 1st, 5th, 3rd, 6st, 2nd and 4th.