ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1993

Seria: MECHANIKA z. 113 Nr kol. 1198

Marek KRAWCZUK, Wiesław OSTACHOWICZ
Instytut Maszyn Przepływowych PAN, Gdańsk

PROSTOKĄTNY PŁYTOWY ELEMENT SKOŃCZONY ZE SZCZELINĄ

Streszczenie. W pracy omówiono metodę tworzenia macierzy sztywności prostokątnego płytowego elementu skończonego ze szczeliną. Do jego budowy wykorzystano teorię Kirchhoffa i prawa mechaniki pękania. Wykorzystując opracowany element obliczono zmiany częstości drgań własnych płyty wspornikowej. Otrzymane wyniki porównano z wynikami badań innych autorów uzyskując wysoką ich zgodność.

RECTANGULAR CRACKED PLATE FINITE ELEMENT

Summary. The paper presents a method of creating of a stiffness matrix of a rectangular cracked plate finite element. Kirchhoff's theory and laws of fracture mechanics were applied to formulation the model. Taking into account elaborated element there were carried out changes of natural vibrations of a cantilever plate. The obtained results were compared with investigation data presented by other authors.

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПЛИТОЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ КОСОЙ С ТРЕЩИНОЙ

Резюме. В работе представлено метод строения матрицы жесщткости прямоуголпной пластинки с трещиной. К еи строении принято теорию Кирхгофа и правила механики разрушения. Исползуя разработанный елемент вычисленно смены частоты собственных колебании пластины. Резултаты исследовани равнено с резултатами других исследователей.

1. WSTĘP

Zagadnienie wpływu pęknięć na dynamikę płyt cienkich analizowano w szeregu pracach [1-6]. Drgania pękniętej płyty opisywano równaniami różniczkowymi otrzymanymi z praw mechaniki ośrodków ciągłych z odpowiednio zmodyfikowanymi warunkami brzegowymi [1-3] lub stosowano równania wynikające z MES

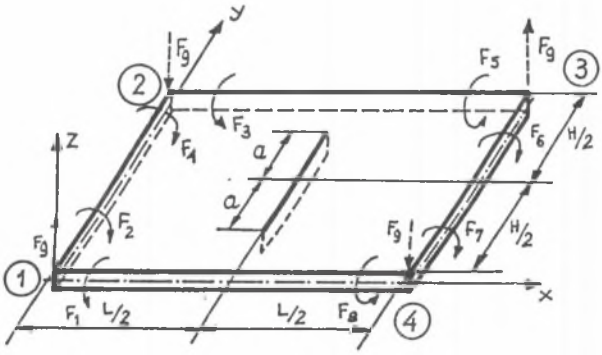
[4-6]. Ze względu na znaczne ograniczenia pierwszej z metod, w chwili obecnej do analizy wpływu szczeliny na dynamikę płyt powszechnie stosuje się MES.

W MES szczelina znajdująca się w płycie może być modelowana poprzez modyfikację macierzy sztywności klasycznego elementu płytowego polegającą na odpowiednim doborze współczynników macierzy sprężystości [4], rozdzielaniu i zagęszczeniu węzłów siatki elementów skończonych w miejscu szczeliny [5] lub też przez stosowanie płytowych elementów skończonych ze szczeliną [6].

Celem niniejszej pracy jest opracowanie płytowego elementu skończonego z wewnętrzną szczeliną otwartą, który można stosować w analizie dynamiki cienkich płyt prostokątnych z wadami materiałowymi w postaci szczelin.

2. MACIERZ SZTYWNOŚCI PROSTOKĄTNEGO ELEMENTU SKOŃCZONEGO ZE SZCZELINĄ

Płytowy element skończony ze szczeliną, o czterech węzłach i trzech stopniach swobody w węźle, przedstawia rys. 1.



Rys. 1. Prostokątny płytowy element skończony ze szczeliną

Fig. 1. Rectangular plate finite element with crack

Macierz sztywności elementu może być obliczona za pomocą zależności [7]:

$$K_e = B^T C^{-1} B, \tag{1}$$

gdzie: B jest macierzą transformacji układu zależnych sił węzłowych S_1-S_{12}

do układu niezależnych sił węzłowych F_1-F_9 [7], C^{-1} jest odwrotnością macierzy podatności elementu będącej sumą macierzy podatności pełnego elementu $C^{(o)}$ [7] i macierzy dodatkowych podatności wywołanych szczeliną $C^{(1)}$.

2.1. Macierz dodatkowych podatności płytowego elementu wywołanych szczeliną

Dodatkową energię odkształcenia sprężystego wywołaną szczeliną, w przypadku płaskiego stanu naprężenia, przedstawia zależność [8]:

$$U^{(1)} = \frac{1}{E} \int_A \left(K_I^2 + K_{II}^2 \right) dA, \tag{2}$$

gdzie: A jest polem powierzchni szczeliny, K_I oraz K_{II} są współczynnikami intensywności naprężeń odpowiadającymi dwóm przypadkom rozwoju szczelin [8].

W przypadku płyty o nieskończonych wymiarach współczynniki intensywności naprężeń można zapisać w postaci:

$$\left.\begin{aligned} K_I &= \frac{1}{\pi a} \int_{-a}^{a} \sigma_x\left(\frac{L}{2}, y\right) \left(\frac{a+y}{a-y} \right)^{1/2} dy \\ K_{II} &= \frac{-1}{\pi a} \int_{-a}^{a} \tau_{xy}\left(\frac{L}{2}, y\right) \left(\frac{a+y}{a-y} \right)^{1/2} dy \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Wyrażając naprężenia w płycie w funkcji niezależnych sił węzłowych [7]:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x\left(\frac{L}{2}, y\right) &= \frac{24z}{Hh^3} \left[F_3\left(-1+3\frac{y}{H}\right) + F_7\left(2-3\frac{y}{H}\right) \right] \\ \tau_{xy}\left(\frac{L}{2}, y\right) &= \frac{12z}{h^3} F_9 \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

a następnie podstawiając (4) do (3) i całkując, określamy współczynniki intensywności naprężeń w funkcji niezależnych sił węzłowych:

$$\left.\begin{aligned} K_I &= \frac{24z}{Hh^3} \left[F_3\left(-1+\frac{3a}{2H}\right) + F_7\left(2-\frac{3a}{2L}\right) \right] \sqrt{\pi a} \\ K_{II} &= -\frac{12z}{h^3} F_9 \sqrt{\pi a} \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Związek (5) został wyprowadzony na podstawie związków klasycznej teorii Kirchhoffa. Ponieważ w teorii tej pomija się odkształcenia poprzeczne, nie opisuje ona prawidłowo osobliwego charakteru pola odkształceń wokół wierz-

chołka szczeliny. Wprowadzając odpowiednie funkcje poprawkowe, możemy otrzymane związki (5) transformować do rozwiązania zgodnego z teorią Reissnera [8]:

$$K_{ir} = \Phi_i K_{ik}\ ,\quad i=I,II, \tag{6}$$

gdzie: K_{ir} teoria Reissnera, K_{ik} teoria Kirchoffa, Φ_i funkcje poprawkowe [8].

Związki opisujące współczynniki intensywności naprężeń K_{ir} są prawdziwe dla płyty o nieskończonych wymiarach. W przypadku skończonych wymiarów płyty współczynniki te należy skorygować [6]:

$$K^f_{ir} = K_{ir}\ f(s)\ ,\quad i=I,II, \tag{7}$$

gdzie: K^f_{ir} - współczynniki intensywności naprężeń dla płyty o skończonych wymiarach, f(s) funkcja poprawkowa uwzględniająca skończone wymiary płyty:

$$f\left(\frac{a}{2H}\right) = 1.0 + 0.01876\left(\frac{a}{2H}\right) + 0.1825\left(\frac{a}{2H}\right)^2 + 2.024\left(\frac{a}{2H}\right)^3 - 2.4316\left(\frac{a}{2H}\right)^4. \tag{8}$$

Podstawiając związki (5-8) do zależności (2) i różniczkując względem niezależnych sił węzłowych otrzymujemy niezerowe wyrazy macierzy dodatkowych podatności elementu płytowego wywołane szczeliną:

$$c_{33} = \frac{192\pi\Phi_1}{H^2Eh^3}\int_0^a a\left(-1+\frac{3a}{2H}\right)^2 f^2\left(\frac{a}{2H}\right)da, \tag{9}$$

$$c_{15} = \frac{192\pi\Phi_1}{H^2Eh^3}\int_0^a a\left(-1+\frac{3a}{2H}\right)\left(2-\frac{3a}{2H}\right) f^2\left(\frac{a}{2H}\right)da, \tag{10}$$

$$c_{55} = \frac{192\pi\Phi_1}{H^2Eh^3}\int_0^a \left(2-\frac{3a}{2H}\right)^2 f^2\left(\frac{a}{2H}\right)da, \tag{11}$$

$$c_{99} = \frac{192\pi\Phi_2}{H^2Eh^3}\int_0^a af^2\left(\frac{a}{2H}\right)da. \tag{12}$$

3. OBLICZENIA NUMERYCZNE

Dla aluminiowej płyty wspornikowej obliczono zmiany częstości drgań własnych, przyjmując następujące wymiary i stałe materiałowe: długość płyty 0.24 m, szerokość płyty 0.24 m, grubość płyty 0.00275 m, moduł Younga $E=6.7*10^{10}$ N/m^2, liczba Poissona $\nu=0.33$, gęstość materiału płyty $\rho=2800$ kg/m^3. Do dyskretyzacji użyto 24 klasyczne płytowe elementy skończone

(BFS12) oraz 1 element ze szczeliną. Wyniki obliczeń zmian pierwszych czterech częstości drgań własnych płyty ze szczeliną odniesione do częstości drgań własnych płyty bez szczeliny przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1

Długość szczeliny 2a/H	Praca	Zmiany częstości drgań własnych ω/ω_o			
		(1)	(2)	(3)	(4)
0.15	[6] eksperyment	0.9931	0.9989	0.9837	------
	[6] teoria	0.9917	0.9981	0.9807	------
	wyn autorow	0.9921	0.9984	0.9823	0.9904

4. WNIOSKI

Przedstawiona metoda ma ogólny charakter i może być wykorzystywana do tworzenia macierzy sztywności elementów płytowych z innego typu szczelinami, pod warunkiem, że znane są współczynniki intensywności naprężeń dla danego rodzaju szczeliny. Stosując opracowany element skraca się czas obliczeń numerycznych ze względu na fakt, iż nie jest konieczna gęsta siatka elementów skończonych wokół wierzchołka szczeliny. Ułatwia to także wprowadzanie danych do programu.

Z przeprowadzonych obliczeń numerycznych wynika, że szczelina powoduje stosunkowo niewielki spadek częstości giętnych drgań własnych płyty.

LITERATURA

[1] Aggarwala B.D., Ariel P.D.: Vibration and Bending of a Cracked Plate, Engineering Transactions, 29, 295-310, 1981.

[2] Hirano Y., Okazaki K.: Vibration of Cracked Rectangular Plates, Bulletin JSME, 23, 732-740, 1980.

[3] Solecki R.: Bending Vibration of a Simple Supported Rectangular Plate with a Crack Parallel to One Edge, Fracture Mechanics, 18, 1111-1118, 1983.

[4] Cawley P., Adams R.D.: The Location of Defects in Structures from Measurements of Natural Frequencies, Journal of Strain Analysis, 14, 49-57, 1979.

[5] Markström K., Storakers B.: Buckling of Cracked Members under Tension, Journal of Solids Structures, 16, 217-229, 1980.

[6] Qian G.L., Gu S.N.: A Finite Element Model of Cracked Plates Application to Vibration Problems, Computers and Structures, 39, 483-487, 1991.

[7] Przemieniecki J.S.: Theory of Ma]trix Structural Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York 1968.

[8] Sih G.C.: Handbook of Stress Intensity Factors", Lehigh University, Bethlehem, P.A. 1973.

Recenzent: Prof. Eugeniusz Świtoński

Wpłynęło do Redakcji dnia 25.06.1992

Abstract

The paper presents a method of creating stiffness matrix of a plate finite element with a crack. There has been taken advantage of the so-called flexible formulation of, the FEM. The flexibility matrix of the plate finite element with crack is assumed to be a sum of the flexibility matrix of the noncracked finite element and additional flexibility matrix caused by the crack. the finite element matrix with no crack was calculated by taking into consideration the elastic strain energy of the plate corresponding to the Kirchhoff-Love theory. The additional flexibility matrix was obtained by taking into account the additional elastic strain energy due to the occurrence of the crack in the plate. The obtained model was verified by numerical calculations of the natural frequency variations of a cantilever plate with a crack. The obtained results indicate a high compatibility with the investigation data of other authors.