ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1993

Seria: MECHANIKA z. 113 Nr kol. 1198

Ryszard MAROŃSKI

Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej
Politechnika Warszawska

MINIMALIZACJA CZASU W PŁYWANIU SPORTOWYM

Streszczenie. W niniejszej pracy przedstawiono zagadnienie minimalizacji czasu przebycia przez pływaka zadanego dystansu. Zastosowany sposób rozwiązania zadania wykorzystuje zmodyfikowaną metodę ekstremalizacji całek liniowych za pomocą twierdzenia Greena (metodę Mielego). Dla zaproponowanego modelu ruchu zawodnika można wykazać, że wyścig powinien zawierać trzy fazy: fazę wytrzymania, fazę zasadniczą, kiedy zawodnik porusza się ze stałą prędkością oraz finisz ze zmniejszającą się prędkością.

MINIMUM-TIME PROBLEM IN COMPETITIVE SWIMMING

Summary This paper deals with the minimum time problem during the swimming over the given distance. Modified method of linear integrals extremization by Green's theorem (modified Miele's method) is used for the problem solution. For the proposed model of swimmer's motion, the applied method proves that the race can be broken into three phases: gliding phase, cruise with the constant velocity and negative kick at the end of the race.

МИНИМИЗАЦЯ ВРЕМЕНИ В СПОРТИВНОМ ПЛАВАНИИ

Резюме. Эта статья посвящена задачи минимизации времени проплытия пловцом заданного расстояния. Предлагаемый способ решения задачи использует модифицированный метод экстремизации линейных интегралов при помощи теоремы Грина (метод Меле). Длю предложенной модели движения спортсмена оптимальную диаграмму скорости можно разделить на три отрезка: выдержка, плавание с постоянной скоростью и финиш с уменьшаемой скоростью.

1. WSTĘP

W obszernej literaturze dotyczącej analizy rozgrywania wyścigów sportowych niewiele prac posługuje się teorią procesów optymalnych jako narzędziem. Szczególnie jest to widoczne w biegach lekkoatletycznych, gdzie modele ruchu zawodnika zakładają "a priori" stałość pewnych parametrów: dla biegów krótkich zakłada się, że zawodnik wykorzystuje maksimum swoich możliwości fizycznych, dla biegów długich zaś, że prędkość biegu jest stała [6]. Taki sposób postępowania wymaga uzasadnienia teoretycznego. O ile w czasie sprintu zawodnik nie jest w stanie wyczerpać rezerw energetycznych organizmu wynikających z mechanizmów anaerobowych, dlatego biegnie z maksymalną prędkością, o tyle w czasie biegów długich gospodarowanie zapasami energetycznymi (częściowo odtwarzanymi w wyniku przemian areobowych) może odbywać się dowolnie. Decydujące jest gospodarowanie tymi zasobami w sposób zapewniający sukces sportowy - przebycie zadanego dystansu w minimalnym czasie, dlatego można mówić o optymalnej taktyce rozgrywania wyścigów sportowych. Z punktu widzenia matematyki mamy tu do czynienia z typowymi zagadnieniami teorii procesów optymalnych. Fakt ten częściowo tłumaczy małą liczbę opracowań wykorzystujących tę teorię jako narzędzie. Trudności związane z modelowaniem wysiłku fizycznego nakładają się bowiem na trudności rozwiązywania zagadnień teorii procesów optymalnych, które zwykle są źle uwarunkowane. W pracy Kellera [3] znajduje się rozwiązanie zagadnienia minimalizacji czasu przebycia zadanego dystansu w biegach lekkoatletycznych, praca Behnckego [1] dotyczy biegów i pływania, praca Coopera [2] wyścigów wózków inwalidzkich. Przedstawione tam metody rozwiązania bazują na przyrównaniu do zera wariacji funkcjonału, równania ruchu zaś uwzględniane są metodą nieoznaczonych mnożników Lagrange'a. Metody te dają tylko warunki konieczne optymalności, brak zaś prostej interpretacji fizycznej mnożników Lagrange'a zmusza do przyjmowania dodatkowych założeń,co może być przyczyną wielu niejasności [1], [2].

W pracy [4] zaproponowano prosty sposób rozwiązania zagadnienia przebycia przez biegacza zadanego dystansu w minimalnym czasie. Wykorzystano mianowicie metodę Mielego ekstremalizacji całek liniowych za pomocą twierdzenia Greena [5]. Metoda ta nie posługuje się pojęciem wariacji funkcjonału. Jest skuteczna dla zagadnień liniowych ze względu na sterowanie, daje warunki konieczne i wystarczające optymalności z uwzględnieniem łuków osobliwych. Ma ona prostą interpretację geometryczną. W omawianym zadaniu metoda ta ma pewną wadę - pozwala na wyznaczenie optymalnej taktyki biegu dla prędkości większej niż pewna prędkość krytyczna. Dla przykładu obliczeniowego podanego w pracy [4] prędkość biegacza powinna być większa niż $v_{cr} = 6.09\ ms^{-1}$. Rozwiązanie optymalne składa się z trzech odcinków: rozpędzania, gdzie zawodnik wykorzystuje maksimum swoich możliwości, odcinka, na którym prędkość biegacza jest stała i z finiszu z malejącą prędkością. W pływaniu sytuacja jest odmienna. Prędkość startu (prędkość zetknięcia z wodą) jest zwykle większa niż prędkość ustalona na drugim odcinku. Można pokazać, że wszystkie trajektorie możliwe do realizacji znajdują się powyżej prędkości krytycznej. Pozwala to w pełni wykorzystać zalety proponowanej metody.

2. MODEL RUCHU PŁYWAKA

Model ruchu pływaka jest następujący. Zawodnika traktujemy jak punkt materialny, pokrywający się z jego środkiem masy, poruszający się po torze prostoliniowym. Zaniedbujemy nawroty oraz pionowe przemieszczenie środka masy w czasie skoku do wody. Dystans jest pomniejszony o długość skoku oraz o odległość końców palców od środka masy pływaka. Na zawodnika działają:

- w kierunku poziomym siły: napędzająca f (zmienna w czasie wyścigu), oporu hydrodynamicznego r(v) zależna od prędkości (w obliczeniach przyjęto $r(v)=dv^2$, gdzie d = const),
- w kierunku pionowym równoważące się siły: ciężkości pływaka i wyporu.

Równanie ruchu pływaka wynika z drugiej zasady Newtona i ma postać:

$$\frac{dv}{dt} = f - r , \tag{1}$$

gdzie: v jest prędkością ruchu pływaka, t jest czasem. Wielkości występujące we wzorze (1) odniesiono do jednostki masy pływaka.

Przemiany energetyczne zachodzące w organizmie zawodnika reprezentuje równanie bilansu mocy

$$\frac{dE}{dt} = \sigma - \frac{fv}{n} , \tag{2}$$

gdzie E jest dostępną energią chemiczną przypadającą na jednostkę masy pływaka, σ - prędkością odtwarzania energii na jednostkę masy, n - sprawnością przekształcania energii chemicznej w mechaniczną.

Układ równań (1) i (2) powinien być uzupełniony warunkami początkowymi wyrażającymi fakt, że na starcie zarówno prędkość, jak i zasób energii, jakim dysponuje zawodnik, są dane:

$$v(t_A) = v_A , \qquad E(t_A) = E_A . \tag{3}$$

Dany jest również dystans, jaki należy przebyć:

$$L = \int_A^B v\, dt \,. \tag{4}$$

Indeksy A i B odnoszą się odpowiednio do punktów: początkowego i końcowego. Na całym dystansie muszą być ponadto spełnione ograniczenia nierównościowe nałożone na siłę napędzającą i energię:

$$0 \le f(t) \le f_{max}\,, \qquad E(t) \ge 0\,. \tag{5}$$

Zagadnienie polega na wyznaczeniu takiego przebiegu zmiennej sterującej f(t), aby spełnione były równania stanu (1) i (2) z warunkami początkowymi (3), ograniczeniami nierównościowymi (5), ograniczeniem izoperymetrycznym (4) i aby czas

$$T = \int_A^B dt \tag{6}$$

był minimalny.

3. METODA ROZWIĄZANIA. WYNIKI

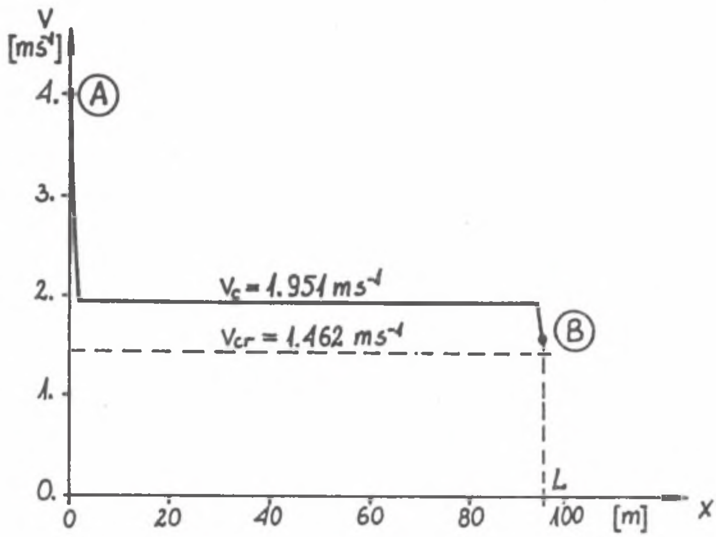
Sformułowany problem rozwiązano zmodyfikowaną metodą Mielego (w wersji oryginalnej metoda ta była opracowana dla ustalonego stanu końcowego - tu v_B nie jest znane). Metoda polega na sprowadzeniu minimalizowanego wskaźnika jakości (6) oraz ograniczenia izoperymetrycznego (4) do dwóch całek liniowych zależnych od energii E i prędkości v. W tym celu należy wykorzystać równania stanu (1) i (2). Otrzymujemy wówczas:

$$T = \int_A^B \frac{n}{n\sigma - vr}\, dE + \frac{v}{n\sigma - vr}\, dv\,, \qquad L = \int_A^B \frac{vn}{n\sigma - vr}\, dE + \frac{v^2}{n\sigma - vr}\, dv\,. \tag{7}$$

Dalszy sposób postępowania polega na sprowadzeniu rozważanego zadania do zadania minimalizacji jednej całki. Korzysta się z metody nieoznaczonych mnożników Lagrange'a. Ograniczenia nierównościowe (5) pozwalają na wyznaczenie tak zwanego zbioru rozwiązań dopuszczalnych na płaszczyźnie (E,v). Wszystkie rozwiązania powinny znajdować się we wnętrzu lub na brzegu tego zbioru oraz powyżej prostej oznaczającej prędkość krytyczną wynoszącą dla rozważanego przykładu $v_{cr} = 1.462\ \mathrm{ms}^{-1}$. Można pokazać, że dla funkcji r, n i σ zależnych tylko od prędkości v rozwiązanie optymalne składa się z trzech odcinków: wytrzymania, gdzie f=0, odcinka, na którym prędkość pływaka jest stała, siła napędzająca zaś jest mniejsza od maksymalnej $f(t)<f_{max}$ oraz finiszu, gdzie prędkość pływaka maleje i wynika z warunków E(t)=0 i dE=0.

Wykres prędkości optymalnej zawodnika przedstawiono na rys. 1.

W obliczeniach przyjęto: $L = 95.4$ m (dystans 100 m), $f_{max} = 2.5\ ms^{-2}$, $d = 0.55\ m^{-1}$, $E_A = 1400\ m^2s^{-2}$, $\sigma = 21.5\ m^2s^{-3}$, $n = 0.08$, $v_A = 4\ ms^{-1}$.



Rys. 1. Optymalna prędkość pływaka na dystansie 100 m
Fig. 1. The optimal swimmer's velocity during the 100-meter race

LITERATURA

[1] Behncke H.: Optimization Models for the Force and Energy in Competitive Sports. Math. Meth. in the Appl. Sci. 9, 1987, pp. 298-311.

[2] Cooper R.: A Force/Energy Optimization Model for Wheelchair Athletics. IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics 20, 1990, pp. 444-449.

[3] Keller J.B.: Optimal Velocity in a Race. American Mathematical Monthly 81, 1974, pp. 474-480.

[4] Maroński R.: O "teorii biegów lekkoatletycznych". ZN Pol.Śl., Mechanika z. 107, Gliwice 1992, s. 251-256.

[5] Miele A.: Extremization of Linear Integrals by Green's Theorem. In Leitmann G.: Optimization Techniques with Applications to Aerospace Systems. Academic Press, New York 1962, pp. 69-98.

[6] Ward-Smith A.: A Mathematical Theory of Running. J. of Biomechanics 18, 1985, pp. 337-349.

Recenzent: Prof. Józef Wojnarowski

Wpłynęło do Redakcji dnia 22.11.1992

Abstract

In this paper the minimum-time problem in competitive swimming is considered. The applied model of swimmer's motion is the extension of the model for the competitive running [3], [4]. The model is based on Newton's second law (1) and an equation describing transformation of chemical energy into mechanical one (2). Initial conditions imposed on the swimmer's velocity and the energy are given (3). Since the propulsive force f(t), variable during the race, cannot be arbitrarily strong the additional inequality constraint is imposed (5). The energy E(t) cannot be negative, as well. Since the distance is specified, the magnitude of the integral (4) is also given. In the problem under consideration we are looking for the propulsive force f(t) to minimize the time of covering the distance. Such a problem has been solved by Behncke basing on a classical method of optimal control [1]. In this paper, the Miele's method has been applied for the same problem. It is superior to the previous one because it has a simple geometrical interpretation and it gives sufficient and necessary conditions of optimality. The optimal competitive race can be broken into three phases (not four, like in [1]): the gliding phase at the beginning, the predominant phase - cruise with the constant velocity and the negative kick at the end.