ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1993

Seria: MECHANIKA z. 113 Nr kol. 1198

Maciej MINCH, Dariusz STYŚ

Instytut Budownictwa
Politechnika Wrocławska

NIELINIOWE MODELOWANIE ZARYSOWANYCH ŻELBETOWYCH DŹWIGARÓW POWIERZCHNIOWYCH METODĄ ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono wybrane aspekty nieliniowego modelowania zbrojenia i betonu w powierzchniowych dźwigarach żelbetowych z uwzględnieniem rys. Rozwiązanie uzyskano za pomocą metody elementów brzegowych. Zamieszczono przykład liczbowy.

NONLINEAR MODELING OF RC CRACKED PLANAR GIRDERS BY THE BOUNDARY ELEMENT METHODS

Summary. The paper presents some aspects of nonlinear modeling of reinforced bars and concrete in RC cracked planar structure. To solve presented problem the boundary element method was applied. The results of numerical calculations were shown.

НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛЬ МЕТОДА КРАЕВЫХ ЕЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ТРЕЩИНАМИ

Резюме. В работе передставлено некоторыйе аспекты нелинейного моделирования арматуры и бетона для железобетонных поверхностных элементов с трещинами. Представлено применение метода краевых элементов для решения задачи. Дан числовой пример.

1. WPROWADZENIE

Rzeczywiste zachowanie się żelbetowych dźwigarów powierzchniowych różni się znacznie od rezultatów otrzymanych z ich modelowania liniową teorią

sprężystości. Powierzchniowe dźwigary żelbetowe już od początku obciążenia wykazują nieliniowe deformacje spowodowane nieliniową zależnością σ-ε dla betonu. Dla obciążeń użytkowych q oraz granicznych q_{gr} obserwuje się zwiększenie nieliniowości w wyniku powstania nieciągłości konstrukcji, która staje się niejednorodna przez powstanie rys i naruszenie więzów przyczepności między zbrojeniem a betonem. Rysy powodują podział obszaru konstrukcji dźwigara na jednorodne strefy bez rys. Każda ze stref jest połączona z sąsiednią poprzez zbrojenie znajdujące się w rysie. W ten sposób brzegi rys w punktach występowania prętów zbrojeniowych nie są wolne od napięć. Jednocześnie uogólniony wektor przemieszczeń (zwany również wektorem Burgersa), definiowany jako różnica granic funkcji uogólnionych na obu brzegach rys ($[f]_s = \lim^+ f - \lim^- f$), doznaje w rysach skoku o wartości równej rozwarciu rys:

$$[\bar{u}]_s = -\bar{g}(s,\bar{N}) \quad , \quad [\partial w/\partial n]_s = -\bar{r}(s,\bar{M}) \quad , \quad [\mathcal{L}(\bar{u},w)]_s = 0 \quad , \tag{1}$$

gdzie: $\bar{u}$, w - wektor przemieszczenia w płaszczyźnie oraz ugięcie;

$\mathcal{L}(\bar{u},w) = \bar{n}\,\bar{c}\,\hat{\nabla}$ - operator różniczkowy oznaczający pochodną normalną do linii rysy s;

$\bar{n}$ - wektor cosinusów kierunkowych;

$\bar{c}$ - tensor stałych sprężystych;

$\bar{g}$, $\bar{r}$ - gęstość defektu (zmodyfikowany wektor Burgersa zależny dodatkowo od sił wewnętrznych w rysie);

$\bar{N}$, $\bar{M}$ - wektor napięć i momentów w rysie.

Własności (1.1) i (1.2) zapewniają nieciągłość wektora przemieszczeń $\bar{u}$ i pierwszej pochodnej ugięcia w na krzywej s, podczas gdy własność (1.3) daje ciągłość wektora napięć $\bar{N}$ w rysie ($\bar{N} = \int \bar{\sigma}\, dh$, gdzie h oznacza grubość dźwigara). Należy zwrócić uwagę, że nieciągły warunek (1.3) powoduje sprzężenie stanów płaskiego (tarczowego) i zgięciowego w analogiczny sposób do stosowanego dla dużych przemieszczeń przez funkcję naprężeń Φ:

$$2\Delta\Delta\Phi/Eh = L(\underline{w},\underline{w}) \quad , \quad L(\underline{w},\Phi) = q \quad , \tag{2}$$

gdzie: L - operator różniczkowy.

Ciągłość napięć na brzegach rys spełniona jest w dyskretnej formie w miejscach występowania wkładek zbrojenia konstrukcji. Powoduje to, że warunek (1.3) dotyczy jedynie miejsc w rysie, gdzie jej brzegi połączone są prętami. Na pozostałych fragmentach krawędzi rys konieczne jest spełnienie warunku odpowiadającego warunkowi wolnej krawędzi: $[\sigma_{ij} n_j]_s = 0$.

W niniejszej pracy zaproponowano modelowanie żelbetowych dźwigarów powierzchniowych za pomocą metody elementów brzegowych. Prezentowany model poszerzono o sprzężony stan zgięciowy w stosunku do pracy [1].

2. ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

Konieczność uwzględnienia w rozwiązaniu historii obciążenia powoduje, że równania i definicje sformułowano w formie przyrostowej zależnej od czasu (oznaczenie symbolem ($\dot{}$)). Nieliniowy związek fizyczny dla betonu i stali opisać można pewnymi znanymi funkcjami f w zależności $\dot{\sigma}$-$\dot{\varepsilon}$ ($f = f(\dot{\sigma},\dot{\varepsilon})$). Zgodnie z teorią małych odkształceń, całkowite odkształcenia $\dot{\varepsilon}$ rozdzielić można na część sprężystą $\dot{\varepsilon}^e$ i część niesprężystą $\dot{\varepsilon}^p$:

Do rozwiązania zadania zastosowano pośrednią wersję BEM [2], odpowiadającą algorytmowi sił fikcyjnych $\dot{b}^p$ i $\dot{p}^p$, ze względu na niższy rząd osobliwości w porównaniu np. do algorytmu wstępnych naprężeń.

Równania BEM dla zarysowanego żelbetowego dźwigara powierzchniowego przedstawiają się następująco:

- dla przemieszczeń $\bar{u}$

$$\dot{u}_\alpha(\bar{x}) = \int_{\partial\Omega} \Phi_\gamma(\bar{y})\, U_{\alpha\gamma}(\bar{x},\bar{y})\, d\partial\Omega + \int_\Omega \dot{b}^p_\gamma(\bar{y})\, U_{\alpha\gamma}(\bar{x},\bar{y})\, d\Omega +$$
$$\int_{\partial\Omega} \dot{p}^p_\gamma(\bar{y})\, U_{\alpha\gamma}(\bar{x},\bar{y})\, d\partial\Omega + \int_{s'} \Phi_\gamma(\bar{y})\, U_{\alpha\gamma}(\bar{x},\bar{y})\, ds' + \int_s \rho(\bar{y})\, U^\rho_\alpha(\bar{x},\bar{y})\, ds + \tag{3}$$
$$\int_s \kappa(\bar{y})\, U^\kappa_\alpha(\bar{x},\bar{y})\, ds + \sum_{i=1}^{m} \left[\int_{z_i} \tau(\bar{z})\, U^\rho_\alpha(\bar{x},\bar{z})\, dz_i + \dot{u}^{ki}_\alpha(\bar{x})\right] ,$$

- dla ugięć w

$$\dot{w}(\bar{x}) = \int_{\partial\Omega} \Psi_1(\bar{y})\, w^*(\bar{x},\bar{y})\, d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega} \Psi_2(\bar{y})\, w^*_{,n}(\bar{x},\bar{y})\, d\partial\Omega +$$
$$\int_\Omega \dot{b}^p(\bar{y})\, w^*(\bar{x},\bar{y})\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \dot{p}^p_1(\bar{y})\, w^*(\bar{x},\bar{y})\, d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega} \dot{p}^p_2(\bar{y})\, w^*_{,n}(\bar{x},\bar{y})\, d\partial\Omega + \tag{4}$$
$$\int_{s'} \Psi_1(\bar{y})\, w^*(\bar{x},\bar{y})\, ds' + \int_{s'} \Psi_2(\bar{y})\, w^*_{,n}(\bar{x},\bar{y})\, ds' + \int_s \vartheta(\bar{y})\, w^*_{,nn}(\bar{x},\bar{y})\, ds +$$
$$\sum_{i=1}^{m} \left[\int_{z_i} \tau(\bar{z})\, U^\rho_n(\bar{x},\bar{z})\, dz_i + \dot{u}^{ki}_n(\bar{x})\right] ,$$

gdzie: $\partial\Omega$ - brzeg dźwigara powierzchniowego Ω;

Φ,Ψ - nieznane funkcje o wymiarze funkcji ciągłych na brzegu $\partial\Omega$;

$\bar{U},w^*$ - rozwiązanie podstawowe odpowiednio dla przemieszczeń i ugięć (dla indeksów ρ, κ i ϑ jest to rozwiązanie fundamentalne na odcinku s spowodowane przez dipol sił

normalnych, siły styczne i wymuszenie kątowe, zapewniające spełnienie warunków (1) por [3,4]);

$\tau(z)$ - naprężenia styczne między betonem i prętami stalowymi na linii zerwanej przyczepności z;

m - liczba prętów stalowych w rysie;

s' - krzywa odpowiadająca krzywej s za wyjątkiem punktów występowania prętów zbrojenia;

$\dot{u}^k$ - przemieszczenia spowodowane przez siły klockujące, zgniot betonu i zazębiania się brzegów rys;

Pozostałe wielkości, tzn. naprężenia, momenty i siły tnące można opisać w analogiczny sposób.

Rozwiązanie podstawowe przyjęto wg [5] jako uniwersalne G(x), jednakowe dla funkcji naprężeń G i ugięć w, w postaci:

$$G(\bar{r}) = w^*(\bar{r}) = \frac{1}{16\pi}\bar{r}^2 \ln \bar{r}^2 \tag{5}$$

gdzie $\bar{r} = \phi_1^2 + \phi_2^2$ i $\phi_\alpha = x_\alpha - y_\alpha$, $\alpha = 1,2$.

Rozwiązanie przedstawionego zadania wymaga jeszcze spełnienia warunków brzegowych na brzegu $\partial\Omega$ oraz warunków granicznych w rysie, które przyjęto na podstawie analogii belkowej [6] oraz ogólnych założeń teorii rys, rozdzielając efekty sprężyste $()^e$ i niesprężyste $()^p$:

$$\dot{\bar{g}}(s) = \dot{\bar{g}}^p(s) + \dot{\bar{g}}^e(s)\,\mathcal{F}(\dot{\bar{N}}_n, \dot{\bar{M}}_n) \quad , \quad \dot{\bar{r}}(s) = \dot{\bar{r}}^p(s) + \dot{\bar{r}}^e(s)\,\mathcal{F}(\dot{\bar{N}}_n, \dot{\bar{M}}_n) \quad , \tag{6}$$

gdzie $\mathcal{F}$ oznacza nieliniową funkcję normalnego napięcia N_n i momentu M_n w rysie. Szersze omówienie związków (6) znaleźć można w pracach [3,4,6].

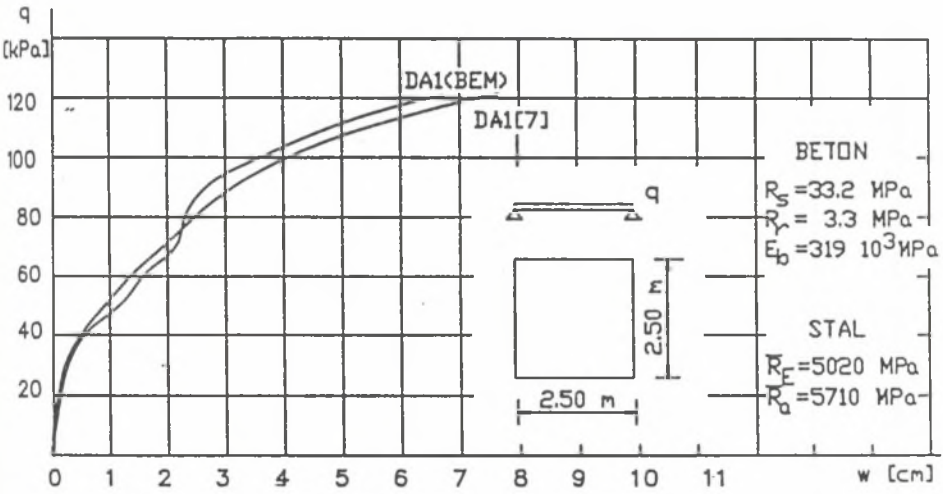
Przyjęcie funkcji fundamentalnych w postaci (5) powoduje, że równania (3) i (4) dla warunków brzegowych i granicznych sprowadzają się do układu silnie osobliwych równań różniczkowo-całkowych na niewiadome Φ, Ψ, ρ, κ i ϑ. Po ich obliczeniu wzory (3) i (4) stanowią wynikową strukturę rozwiązania zarysowanego żelbetowego dźwigara powierzchniowego.

3. PRZYKŁAD NUMERYCZNY

Testowanie sformułowanego algorytmu wykonano na przykładzie badań [7], kwadratowej, wolnopodpartej na wszystkich brzegach, równomiernie obciążonej

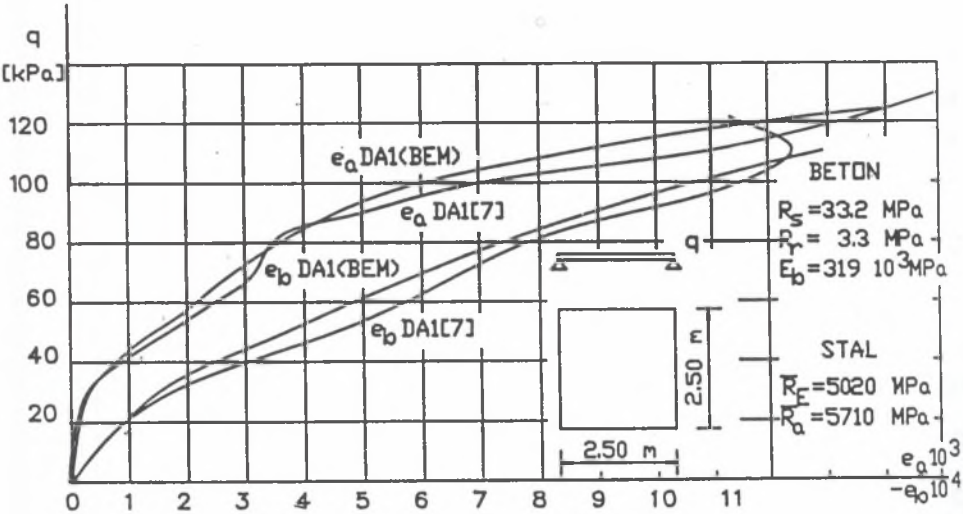
płyty DA1 o grubości 10 cm. Zbrojenie płyty dołem stanowiły pręty ø 8 mm co 8 cm, równolegle do brzegu.

Na rys. 1 przedstawiono porównanie obliczeniowe nieliniowej analizy (BEM) i doświadczalne [7] ugięć punktu środkowego płyty w zależności od jej obciążenia q. Rys. 2 obrazuje odpowiednio odkształcenia zbrojenia ε_a oraz skrajnych włókien strefy ściskanej betonu ε_{bmax} w środku płyty w zależności od obciążenia q. Uzyskane wyniki znajdują się w większości powyżej krzywych otrzymanych doświadczalnie.



Rys. 1. Porównanie badań [7] z obliczeniami (BEM) ugięć środka płyty

Fig. 1. Comparison of calculated load-midpoint deflection relations (BEM) with test results [7]



Rys. 2. Odkształcenia zbrojenia ε_a i maksymalne odkształcenia betonu ε_{bmax} w środku płyty (BEM, [7])

Fig. 2. Load-midpoint reinforcement strain ε_a and maximum concrete strain ε_{bmax} relations (BEM, [7])

LITERATURA

[1] Minch M., Styś D.: Nieliniowe modelowanie żelbetowych tarcz zarysowanych metodą elementów brzegowych. XXXI Sympozjon Modelowanie w Mechanice. ZN Pol. Śl., Mechanika z. 107, Gliwice 1992, s. 291-298.

[2] Brebbia C.A., Telles J., Wróbel L.: Boundary element techniques - theory and applications in engineering, Springer Verlag, Berlin - New York 1984.

[3] Minch M.: Metoda teoretycznego wyznaczania naprężeń w żelbetowych tarczach zarysowanych, Rozp. Inż., T. 28, Z. 3, 1980, s. 445-468.

[4] Minch M., Dmochowski G.: Crack modeling in RC plates., Technical Univ. of Szczecin., X Polish Conference Computer Methods in Mechanics., Swinoujscie, Poland 1991., Conference Materials., vol. 1., s. 157-164., Szczecin 1991.

[5] Gelfand I. M., Szyłow G. E.: Obobszczennyje funkcyji i diejstwija nad nimi, Fizmatgiz, Moskwa 1959.

[6] Borcz A.: Podstawy teorii zarysowanych płyt żelbetowych, TNEB, Warszawa 1963.

[7] Absi E., Brandt A. M.: Analysis and tests of reinforced concrete cracked slabs, PWN, Warszawa 1974.

Recenzent: Prof. Antoni Jakubowicz

Wpłynęło do Redakcji dnia 20. 11. 1992

Abstract

The paper presents the nonlinear model of RC slabs and panels. Up to now RC slabs and panels are designed as elastic, isotropic and homogeneous. So, a method of calculating RC planar girders under loading that would enable estimation of changes caused by cracks in the distribution of internal forces is still needed. The paper presents these demands because it assumes that the most important attribute of RC construction is their heterogeneity, i.e. the defects caused by cracks. A general functions characterizing discontinuity of displacement vector were assumed. The cracks in reinforced concrete were described by using the mathematical theory of defects and the elements of general crack theory. The nonlinear physical laws of concrete and reinforcing bars were considered. The limit conditions in crack for displacement and deflection were described by Burger's vector (Eq.1.). To solve so formulated problem the boundary element method with using incremental and iterative techniques was applied (Eq.3., Eq.4.). The numerical calculations for presented method compared with experimental study (Fig.1,2.) were shown.