

Franciszek PLEWA, Kazimierz WANAT

Katedra Eksploatacji Ziół
Politechnika Śląska

MODEL MATEMATYCZNY PRZEPLYWU WIELOFAZOWEGO
(WODA-GAZ-CIAŁA STAŁE)

Streszczenie. Przedstawiono zasadę modelowania przepływu wody, powietrza i ciał stałych występującego w rurociągach pionowych instalacji do transportu urobku z poziomu niższego na wyższy. Prace kończą przykładowe wyniki obliczeń otrzymane za pomocą EMC.

MATHEMATICAL MODEL OF MULTIPHASE FLOW
(WATER - GAS - SOLID BODIES)

Summary. A principle for modelling water, air and solidsflow in vertical pipeline of an installation for the transport of the output from a lower to a higher level. Some examples of computations done with the help of EMC are given.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГОФАЗНОГО (ВОДА-ГАЗ-ТВЕРДЫЕ
ЧАСТИЦЫ) ТЕЧЕНИЯ.

Резюме. Представлен принцип моделирования течения воды, воздуха и твердых тел имеющего место в трубопроводах вертикальных установок для транспортировки добычи с нижнего горизонта на верхний. Работу завершают примерные результаты расчетов полученные на ЭВМ.

1. WSTĘP

W instalacjach hydrauliczno-pneumatycznego transportu, służących do podnoszenia kopalin stałych z poziomu niższego na wyższy, występuje proces zasysania i transportu ciał stałych w strumieniu mieszaniny wodno-powietrznej. Występujący tu proces jest bardzo skomplikowany i trudny

do opisu matematycznego.

Dotychczasowe próby opisu posługują się regułami uproszczonymi, zakładającymi mieszaninę jednorodną [3] lub zwiększanie się objętości jednorodnych pęcherzyków powietrza bez uwzględnienia ich rozpadu na mniejsze [5]. Założenia te oraz przyjmowana jednokierunkowość ruchu cząstek opisują proces uproszczony i nie odpowiadający tym zjawiskom, które obserwuje się w pracujących instalacjach.

Dlatego też na podstawie dotychczasowych badań i analiz zaproponowano całkowicie odmienny sposób opisu i analizy obserwowanych zjawisk w przepływach wielofazowych.

2. MODELOWANIE PRZEPLYWU WIELOFAZOWEGO (WODA-GAZ-CIAŁA STAŁE)

2.1. Założenia do modelu teoretycznego [1,2,4]

Ruch mieszaniny wodno-gazowej oraz ruch takiej mieszaniny z udziałem ciała stałego przedstawia się w postaci sumy niezależnych ruchów środków mas pęcherzy gazu, cząstek reprezentujących wodę oraz cząstek ciał stałych. Uwzględnia się także ruchy kolektywne składające się z układów tych cząstek, a będących efektem wzajemnego łączenia (zlepiania) się poszczególnych faz układu.

W odniesieniu do niezależnych ruchów cząstek poszczególnych faz przyjmuje się, że cząstki te poruszają się w polu siły ciężkości i siły wyporu wynikającej z usytuowania cząstki w ośrodku zastępczym o gęstości:

$$\rho_m = \frac{M_s + M_w + M_g}{V} \quad (1)$$

gdzie:

ρ_m - gęstość ośrodka zastępczego,

M_s - masa ciał stałych,

M_w - masa wody,

V - objętość instalacji,

oraz siły oporu działającej przeciwnie do różnicy prędkości cząstki \varnothing i prędkości ośrodka w .

Oznaczając przez

m - masa cząstki,

g - przyspieszenie ziemskie,

r - promień cząstki,

ν - lepkość ośrodka

$$x = \vartheta - w \quad i \quad s = \text{sign}(x)$$

składową pionową przyspieszenia cząstki opisuje się wyrażeniem

$$\vartheta = a\vartheta^2 + b\vartheta + c \quad (2)$$

gdzie:

$$a = \frac{-9}{4} \rho_m \pi \frac{r^2}{m} \quad (3)$$

$$b = -6\pi\nu\rho_m \frac{r}{m} \quad (4)$$

$$c = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_m \frac{g}{m} - g \quad (5)$$

W przedstawionym modelu przyjęto założenie, że ruchy poziome są jednostajne. Uwzględnia się odbicia cząstek o ścianki rurociągu oraz tarcie, zakładając, że jeśli cząstka weszła w obszar przyścienny, to jej pionowa składowa prędkości ulega określonemu zmniejszeniu (współczynnik „k”).

Pionową składową prędkości cząstki po czasie Δt otrzymuje się rozwiązując równanie różniczkowe (2) z uwzględnieniem warunku początkowego

$$x(t=t_0) = x_0 = v_0 - w \quad (6)$$

$$\frac{dx}{ax^2 + bx + c} = dt$$

Postać funkcji $x(t)$ zależy od znaku wyróżnika

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Przy małych wartościach x można odrzucić wyraz kwadratowy tego równania.

Kolektywne ruchy cząstek są bardzo trudne do uwzględnienia. Przyjmuje się, że w wyniku działania sił wewnętrznych cząstki znajdujące się we wnętrzu kuli o pewnym promieniu r_g (parametr modelu) ulegają zlepieniu i w przedziale czasu Δt poruszają się jako całość, a następnie rozpadają się na poszczególne składowe. Proces powstawania takiego konglomeratu (supercząstki) podlega prawom zderzenia idealnie niesprężystego. Pęd takiej cząstki P jest równy sumie pędów jej składników przed zderzeniem

$$\bar{P} = \sum \bar{v}_i m_i \quad (7)$$

k - liczba cząstek zawartych w obszarze kulistym o promieniu r_g

Wektor prędkości i energię kinetyczną wyznacza się z zależności:

$$\bar{V} = \frac{P}{M} \quad (8)$$

$$M = \sum_{i=1}^k m_i \quad (9)$$

$$E = 0.5 M v^2 \quad (10)$$

Energia wiązania konglomeratu (supercząstki):

$$E = 0.5 m_1 v_1^2 - E \geq 0 \quad (11)$$

po czasie Δt staje się jej energią rozpadu.

Na rozpatrywaną supercząstkę działają:

- siła ciężkości zaczepiona w jej środku masy

$$\bar{r}_{sm} = \sum_{i=1}^k \frac{r_i m_i}{M} \quad (12)$$

- siła wyporu zaczepiona w środku wyporu

$$\bar{r}_w = \sum_{i=1}^k \bar{r}_i Q_i \quad (13)$$

gdzie Q_i - objętość i -tej super cząstki

Pod działaniem tego układu sił supercząstka zachowuje się jak ciało sztywne wirujące z prędkością kątową Ω i przemieszczające się z prędkością środka masy \bar{v} .

Po czasie Δt oblicza się nowe położenia i prędkości cząstek składowych super cząstki i dokonuje się jej rozpadu.

W układzie środka masy cząstki wylatującej m_1 oraz pozostałości po supercząstce $M_1 = M - m_1$ pęd układu musi być zerem.

$$m_1 \bar{v}_1 = M \bar{v} \quad (14)$$

Natomiast suma energii kinetycznych

$$\frac{1}{2} m_1 \bar{v}_1^2 + \frac{1}{2} M \bar{v}^2 = E \quad (15)$$

musi być równa energii wiązania. Wzory te umożliwiają obliczanie modułów prędkości $\bar{v}_1 = |\bar{v}_1|$ oraz $\bar{v} = |\bar{v}|$, natomiast ich zwrot jest dowolny.

W istocie o kierunku prędkości wylatującej cząstki nie można niczego powiedzieć z uwagi na zupełną nieznaną lokalnych sił powodujących jej rozpad. Z tego względu wektor prędkości określa się losując przypadkowy kierunek w przestrzeni. Proces rozpadu supercząstki kontynuowany jest do

momentu rozbicia jej na wszystkie składniki.

Opisane rodzaje ruchów zmieniają wewnętrzną strukturę układu, ale nie uwzględniają działania zewnętrznej siły hydrostatycznej wywołanej obecnością zewnętrznego płaszcza wody. Jej oddziaływanie może być uwzględnione poprzez dodatkowy kolektywny ruch ośrodka.

Rozważa się ruch ośrodka o gęstości ρ_m poruszającego się z prędkością $\dot{\phi}_m$ wewnątrz rury o polu przekroju A , zanurzonej w cieczy nieskończonej o gęstości ρ . Dla rozpatrywanego przypadku słuszna jest zasada zachowania energii w postaci:

$$\rho g h_1 = \rho_m g h + \frac{1}{2} \rho_m v_m^2 \quad (16)$$

Jeżeli słup cieczy o wysokości h wychyli się z położenia równowagi na odległość „ x ”, wówczas zadziała na nią siła harmoniczna

$$F = -S r_m g x \quad (17)$$

dążąca do przywrócenia równowagi układu.

Ponieważ ruchy cząstek umożliwiają wyznaczenie poziomu h mieszaniny, natomiast ze wzoru (16) można wyznaczać położenie równowagowe h , więc wzór (17) pozwala na skorygowanie prędkości i położenia cząstek.

2.2. Rozpady cząstek

Cząstki gazu i cieczy mogą się rozpadać i łączyć (zlepić). Zdarzenia rozpadu bądź syntezy cząstek poszczególnych faz są niezależne od siebie. Zakłada się, że prawdopodobieństwo p_r wystąpienia n takich zdarzeń w przedziale czasu Δt opisuje rozkład Poissona:

$$p_r(n, \Delta t) = \frac{(\lambda \Delta t)^n}{n!} \exp(-\lambda \Delta t) \quad (18)$$

natomiast parametr rozkładu λ jest jednym z parametrów modelu i wynosi:

$$\lambda = \frac{1}{T}$$

T - średni czas rozpadu.

Jeśli układ liczy (zawiera) N cząstek, to:

$$\lambda = \frac{N}{T}$$

Losowaniu podlega liczba zdarzeń n zgodnie z rozkładem (18) oraz numery cząstek, które ulegają rozpadowi bądź też stają się cząstkami pochłaniającymi inne. Jeżeli rozpatruje się proces rozpadu, wówczas wylosowaną cząstkę dzieli się na dwie, nadając im masy o przypadkowych wartościach, ale takich, że ich suma jest równa masie cząstki wyjściowej.

Prędkości cząstek ustala się w taki sposób, jak przy opisanym rozpadzie supercząstki, przyjmując, że energia wiązania cząstki ma przypadkową wartość nie większą od jej energii kinetycznej. Syntezie podlegają zaś te cząstki, które położone są najbliżej cząstki o wylosowanym numerze do syntezy. Proces ten rozpatruje się jako zderzenia niesprężyste.

2.3. Symulacja pracy instalacji

W stanie wyjściowym instalacja jest napełniona wodą do poziomu h_1 , co reprezentuje N_w cząstek wody o identycznych masach i objętościach równomiernie rozłożonych w przestrzeni. Powietrze jest dostarczane do instalacji poprzez dysze znajdujące się na poziomie h_d . Jeśli liczba dysz wynosi L_d , natomiast średnia objętość pęcherza gazu wynosi V_g , gęstość ρ_g , to w czasie Δt jest dostarczana do układu następująca masa gazu:

$$M_g = Q_g G_g \Delta t \quad (19)$$

$$N_g V_g \rho_g = M_g \quad (20)$$

Na każdą dyszę przypada więc średnio $\frac{N_g}{L_d}$ pęcherzyków powietrza.

Minimalna prędkość wlotu pęcherzy musi być równa promieniowi kuli o objętości $N_g/L_d V_g$ podzielonemu przez czas Δt . Kierunek tej prędkości określa kąt wlotu powietrza. W praktyce prędkość wlotu powietrza zależy od ciśnienia zasilania konstrukcji i ukierunkowania dysz. Objętości wtryskiwanych pęcherzy losowane są zgodnie z rozkładem Gaussa o wariancji δ i średniej V_g .

Zasysanie nowych porcji wody następuje wówczas, gdy estymowana wysokość słupa mieszaniny h jest taka, że objętość $h\pi R^2$ zajmowana przez mieszaninę jest większa od sumy objętości wszystkich cząstek. Woda jest zasysana porcjami o minimalnej objętości V_{mh} w ilości koniecznej do uzyskania wymaganej zgodności geometrycznej. Jeśli w przepływie uczestniczą cząstki stałe, wówczas porwanie ich następuje z prawdopodobieństwem p_r (parametr

modelu) przy czym zawsze zasysana jest pewna wielokrotność k' (parametr modelu) objętości słupa wody znajdującego się między cząstką ciała stałego a dnem instalacji. Ciała stałe zasysane są z obszaru znajdującego się opd dnem instalacji na głębokości h_c i widzianego pod kątem ϕ , (parametr modelu) przy spełnieniu warunku, że prędkość cieczy w tym miejscu jest większa od prędkości unoszenia cząstek. Każdy z aktów pochłonięcia cząstki powoduje zmniejszenie prędkości mieszaniny, gdyż jest to efekt niesprężystego zderzenia pochłanianej cząstki z ruchomą mieszaniną. Początkowe prędkości zasysanych cząstek stają się równe średniej prędkości mieszaniny, przy czym współrzędna pionowa ma wartość zero, a współrzędne poziome są liczbami przypadkowymi o takich wartościach, by cząstki te mieściły się wewnątrz instalacji.

W ogólności na początku odcinka czasu Δt jest N_w cząstek wody, N_g cząstek gazu i N_s cząstek stałych o znanych masach, prędkościach i objętościach. Przyjmuje się, że w czasie Δt powstanie K supercząstek, nastąpi wtrysk N_g/L_d pęcherzy gazu w każdej z dysz oraz, że każdy wtrysk powietrza prowadzi do powstania supercząstki. Dopóki liczba aktów wtrysku jest mniejsza od K przyjmuje się, że w centrum supercząstki umieszczony jest pęcherz wtrzyśniętego powietrza. Później centrum to losuje się wewnątrz objętości zajmowanej przez mieszaninę. Następnie badane są ruchy supercząstek poprzez określanie nowych współrzędnych i składowych prędkości po czasie Δt .

Parametry symulacji cząstek:

Promień	[m]
Współczynnik tarcia	[-]
Ilość powstałych cząstek w czasie Δt	
Krok czasowy	
Wariancja objętości gazu	
Obszar przyścienny	[m]
Spowolnienie	[-]
Czas rozpadu wody	[s]
Czas rozpadu gazu	[s]
Czas syntezy wody	[s]
Czas syntezy gazu	[s]
Tarcie woda - ośrodek	[-]
Tarcie cząstki stałe - ośrodek	[-]

Tarcie gaz - ośrodek	[-]
Prędkość unoszenia cząstek stałych	[m/s]

4. PODSUMOWANIE.

Zaproponowany model matematyczny przepływu gazu, wody i cząstek stałych w rurociągach pionowych daje rezultaty zgodne z wynikami doświadczeń. Istotna jest również zgodność uzyskiwanych charakterów przebiegu z wynikami obserwowanymi i rejestrowanymi na instalacji laboratoryjnej.

LITERATURA

- [1] Kampen N.G.van: Procesy stochastyczne w fizyce i chemii. PWN, Warszawa 1990.
- [2] Patter D.: Metody obliczeniowe fizyki. PWN, Warszawa 1977.
- [3] Plewa F.: Model matematyczny przepływu mieszanin dwufazowych (woda, ciała stałe) w rurociągach pionowych przy koncentracji $C_t \leq 10\%$. Materiały na XXII Sympozium PTMTS, Wisła 1983.
- [4] Plewa F., Wanat K.: Modelowanie i protekacja gazowodianej smiesi w wiertikalnych truboprowadach i jego rieszzenie s pomoszczju ewm. Hydromechanisation VII, Warna 1991.
- [5] Plewa F.: Optymalizacja parametrów przepływu trójfazowego w instalacjach hydro-pneumo-transportu. Pol. Śl., Gliwice 1981 (praca doktorska).

Recenzent: Prof. Adam Klich

Wpłynęło do Redakcji dnia 4. 10. 1992

Abstract

A very complex and turbulent process of a flow of air bubbles, water and solid bodies occurs in installation for hydraulic and pneumatic transportation of grained material from a lower to a higher level. So far analogue attempts at describing this phenomenon have not been succesful since they could not take into account such factors like different directions of movements, huge diversity of air bubbles and their

decomposition into smaller ones.

The proposed mathematical model makes it possible to take into account all those parameters and the worked out computing programme is capable of determining:

- volume intensity of air, water and solids velocities in a cross-section of a pipeline,
- distribution of air, water and solids velocities in a cross-section of a pipeline,
- distribution of air, water and solids velocities in a horizontal section of a pipeline,
- distribution of air bubbles in the flowing hydromixture.