ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1993

Seria: MECHANIKA z. 113 Nr kol. 1198

Janusz SKOREK

Instytut Techniki Cieplnej
Pollitechnika Śląska

ANALIZA CIĄGŁYCH I DYSKRETNYCH ZAGADNIEŃ WŁASNYCH DLA RÓWNANIA PRZEWODZENIA CIEPŁA

Streszczenie. Przedstawiono założenia metody rozwiązania równania przewodzenia ciepła opierając się na rozwiązanie ciągłego lub dyskretnego zagadnienia własnego. Wskazano na analogię pomiędzy ciągłym i dyskretnym sformułowaniem zagadnienia własnego.

ANALYSIS OF CONTINUOUS AND DISCRETE EIGENVALUE PROBLEM FOR HEAT CONDUCTION PROBLEM

Summary. Assumptions of the method of solution of heat conduction equation based upon solution of continuous or discrete eigenvalue problem is presented in the paper. Analogy between continuous and discrete formulation of the eigenvalue problem is pointed out.

АНАЛИЗ ПОСТОЯННЫХ И ДИСКРЕТНЫХ СООБСТВЕННЫХ ПРОБЛЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Резюме. Представлены принципы медода решения уравнения теплопроводности опираясь на решение постаянной или дискретной сообственной проблемы. Указана аналогия между постоянным и дискретным сформулированием сообственной проблемы.

1. WSTĘP

Jedną z metod stosowanych do rozwiązywania równań matematycznej fizyki, a w tym równania przewodzenia ciepła, jest metoda oparta na wyrażeniu rozwiązania w postaci widmowej (spektralnej), tzn. na wartościach własnych i funkcjach (wektorach) własnych odpowiednio sformułowanego zagadnienia własnego [2]. Reprezentantem metod spektralnych w dziedzinie metod analitycznych jest metoda skończonych przekształceń całkowych [1] stosowana szeroko do rozwiązywania zagadnień brzegowych przewodzenia ciepła. Mimo wielu zalet zakres stosowalności tej metody, podobnie jak i innych metod analitycznych, ogranicza się do ciał o prostych kształtach. Znacznie większe możliwości daje zastosowanie metody spektralnej w połączeniu z metodami dyskretnymi stosowanymi już powszechnie do rozwiązywania omawianych zagadnień [3,4,5,6]. W literaturze metoda ta nosi nazwę Dyskretnej Transformacji Spektralnej DTS [3,4,6] (Discrete Eigenvalue Method [5]). Metoda ta umożliwia uzyskanie rozwiązania ciągłego, np. ze względu na czas przy zachowaniu dyskretyzacji obszaru rozwiązania. Jak wykazują badania takie podejście pozwala znacznie zwiększyć dokładność obliczeń, a także w pewnych przypadkach skrócić czas obliczeń (np. analiza procesów szybkozmiennych, szoków termicznych itp.) [3]. Metoda DTS jest także stosowana do rozwiązywania pewnej klasy zadań odwrotnych [3,6].

Analityczna i dyskretna wersja metody spektralnej wykazuje daleko idącą analogię dotyczącą sformułowania i rozwiązania problemu. Zagadnienie to nie było dotychczas szeroko analizowane w literaturze, choć niewątpliwie stanowi interesujący przyczynek do teorii metod spektralnych. Analogia pomiędzy sformułowaniem ciągłym i dyskretnym zostanie przedstawiona na przykładzie różniczkowego równania Laplace'a opisującego ustalone, bezźródłowe pole temperatury.

2. METODA SKOŃCZONYCH PRZEKSZTAŁCEŃ CAŁKOWYCH

Równanie Laplace'a opisujące ustalone pole temperatury ma postać

$$L\ T(r) = 0 \tag{1}$$

gdzie:

$L=\nabla^2$ - różniczkowy operator Laplace'a,

r - uogólniona współrzędna.

Przyjmuje się, że na brzegu ciała zadane są *niejednorodne* warunki brzegowe. Istota metody skończonych przekształceń całkowych polega na całkowej transformacji wyjściowego równania różniczkowego, rozwiązania równania w dziedzinie transformaty i retransformacji rozwiązania do dziedziny oryginału. Transformacji operatora L dokonuje się w tym przypadku opierając się na jądrze $K(\mu,r)$ wynikającym z rozwiązania zagadnienia własnego Stourma-Liouville'a

$$L\,K(\mu,r) = -\mu^2 K(\mu,r) \qquad (2)$$

Na funkcję $K(\mu,r)$ nakłada się przy tym *jednorodne* warunki brzegowe, zgodne co do typu z warunkami niejednorodnymi nałożonymi na funkcję $T(r)$. Równanie (2) wraz z jednorodnymi warunkami brzegowymi tworzy tzw. zagadnienie własne sformułowane w dziedzinie operatora ciągłego L.

Jeżeli istnieje nietrywialne rozwiązanie zagadnienia własnego (2) w postaci nieskończonego ciągu funkcji $K_i(\mu_i,r)$, gdzie $i=1,2,\ldots,\infty$ to wartości parametru μ_i są wartościami własnymi, a $K_i(\mu_i,r)$ odpowiadającymi im funkcjami własnymi.

Transformacja operatora L jest zdefiniowana następująco

$$\overline{LT} = \int_V LT(r)K(\mu,r)dV \qquad (3)$$

Transformacja (3) jest reprezentacją spektralną operatora różniczkowego $LT(r)$ w nowej bazie generowanej przez funkcje własne tego operatora [2]. Dowodzi się [1], że jeżeli operator różniczkowy jest samosprzężony (jak np. operator Laplace'a), to jego funkcje własne są ortogonalne i po unormowaniu tworzą bazę ortonormalną. W wyniku transformacji (3) równanie (1) przybiera postać

$$-\mu_i^2\,\overline{T}(\mu_i) + \overline{z}(\mu_i) = 0 \qquad (4)$$

gdzie $\overline{T}(\mu_i)$ jest transformatą funkcji $T(r)$, a $\overline{z}(\mu_i)$ jest składnikiem uwzględniającym niejednorodność warunku brzegowego. Ostateczne rozwiązanie $T(r)$ uzyskuje się poprzez retransformację funkcji $\overline{T}(\mu_i)$ polegającą na jej rozwinięciu w szereg funkcji własnych, tzn.:

$$T(r) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i(\mu_i)K(\mu_i,r)\overline{T}(\mu_i) \qquad (5)$$

gdzie $\overline{T}(\mu_i)$ jest rozwiązaniem równania (4).

3. METODA DYSKRETNEJ TRANSFORMACJI SPEKTRALNEJ

Jeżeli do dyskretyzacji równania (1) opisującego ustalone pole temperatury w analizowanym ciele zastosować jedną z powszechnie stosowanych metod dyskretnych (elementów skończonych, bilansów elementarnych itp.), to uzyskuje się następujące dyskretne sformułowanie problemu

$$\mathbb{A}\,\mathbb{T} + \mathbb{B} = 0 \tag{6}$$

Macierz $\mathbb{A}$ jest operatorem dyskretnym powstałym z dyskretyzacji operatora Laplace'a przy założeniu jednorodnych warunków brzegowych. Niejednorodności warunków brzegowych są natomiast uwzględnione w elementach wektora $\mathbb{B}$.

Dyskretny operator $\mathbb{A}$ wykazuje te same cechy, co ciągły operator Laplace'a:

- operator $\mathbb{A}$ jest *samosprzężony* (macierz $\mathbb{A}$ jest *symetryczna*),
- wektory własne symetrycznej macierzy $\mathbb{A}$ są *ortogonalne*.

Dyskretne zagadnienie własne ma w tym przypadku postać

$$\mathbb{A}\,\vartheta_i = \beta_i\,\vartheta_i \qquad (i=1,2,\dots,N) \tag{7}$$

gdzie:

β_i - wartość własna,

ϑ_i - wektor własny odpowiadający wartości własnej β_i.

Dyskretnej transformacji wektora $\mathbb{T}$ dokonuje się w bazie reprezentowanej macierzą $\mathbb{W}$, której kolumny utworzone są przez ortogonalne wektory własne ϑ_i:

$$\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{W}^{-1}\mathbb{T} = \mathbb{W}^{T}\mathbb{T} \tag{8}$$

gdzie własność $\mathbb{W}^{-1} = \mathbb{W}^{T}$ obowiązuje dla bazy ortogonalnej [2].

Po przeprowadzeniu diagonalizacji macierzy $\mathbb{A}$ ($\mathbb{W}^{-1}\mathbb{A}\,\mathbb{W} = \mathrm{Diag}\,\beta$) równanie (6) przybiera postać

$$\beta_i\tilde{T}_i + \tilde{b}_i = 0 \;\Rightarrow\; \tilde{T}_i = -\frac{\tilde{b}_i}{\beta_i} \tag{9}$$

gdzie $\tilde{T}_i$ oznacza transformatę temperatury T_i.

Rozwiązanie w dziedzinie oryginału, czyli retransformacja wektora $\tilde{\mathbb{T}}$, polega na rozwinięciu w sumę według kolejnych wektorów własnych:

$$\mathbb{T} = \mathbb{W}\,\tilde{\mathbb{T}} \;\Rightarrow\; T_i = \sum_{j=1}^{\infty}\vartheta_{ij}\,\tilde{T}_j \tag{10}$$

4. ANALOGIA CIĄGŁEGO I DYSKRETNEGO ZAGADNIENIA WŁASNEGO

Analogia pomiędzy sformułowaniem i rozwiązaniem zagadnienia brzegowego przewodzenia ciepła w postaci ciągłej (1) i dyskretnej (6) staje się w pełni widoczna, jeżeli przyjąć zestawioną w tablicy 1 odpowiedniość pomiędzy pojęciami i wielkościami charakterystycznymi dla metody skończonych przekształceń całkowych i dyskretnej transformacji spektralnej.

Tablica 1

Analogia pomiędzy sformułowaniem ciągłym i dyskretnym

Zagadnienie ciągłe (Metoda skończonych przekształceń całkowych)	Zagadnienie dyskretne (Metoda dyskretnej transformacji spektralnej)
operator różniczkowy L (samosprzężony)	operator dyskretny $\mathbb{A}$ (symetryczny)
funkcja własna $K(\mu_i, r)$	wektor własny ϑ_i
wartość własna μ_i^2	wartość własna $-\beta_i$
zagadnienie własne: $L\,K(\mu_i, r) = -\mu_i^2\,K(\mu_i, r)$	zagadnienie własne: $\mathbb{A}\,\vartheta_i = \beta_i\,\vartheta_i$
transformacja całkowa: $\bar{T} = \int K(\mu, r)T(r)dV$	transformacja dyskretna: $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{W}^{-1}\mathbb{T} = \mathbb{W}^{T}\mathbb{T}$
retransformacja: $T(r) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i(\mu_i)K(\mu_i, r)\bar{T}(\mu_i)$	retransformacja: $T_i = \sum_{j=1}^{N} \vartheta_{ij}\tilde{T}_j$

Przedstawiona analogia pomiędzy metodą skończonych przekształceń całkowych a metodą DTS wynika stąd, że obie metody bazują na transformacji zagadnienia opartego na widmie (spektrum) utworzonym odpowiednio przez funkcje własne i wektory własne właściwego zagadnienia własnego.

LITERATURA

[1] Carslaw H.J.,Jaeger J.C.: Conduction of Heat in Solids. Oxford Clarendon Press, Oxford 1959.

[2] Friedman B.: Wybrane zagadnienia matematyki stosowanej. PWN, Warszawa 1966.

[3] Kurpisz K.,Skorek J.: Zagadnienia odwrotne teorii przewodzenia ciepła. praca badawcza niepublikowana. ITC, Gliwice 1986,1987.

[4] Skorek J.: Zastosowanie teorii operatorów dyskretnych do rozwiązywania zagadnień przewodzenia ciepła. Materiały XIII Zjazdu Termodynamików, Kozubnik 1987.

[5] Smith T.M.,Skladany T.J.: An Eigenvalue Method for Solving Heat Problems. Numerical Heat Transfer, vol.6, 1983, s.106-122.

[6] Szargut J.(red): Modelowanie numeryczne pól temperatury. WNT, Warszawa 1992.

Recenzent: Prof. Jerzy Stanisław Gdula

Wpłynęło do Redakcji dnia 12. 11. 1992

Abstract

Eigenvalue (spectral) approach to the solving of boundary problems of heat conduction can be applied in the both continuous (Finite Integral Transformations Method FITM [1]) and discrete (Discrete Eigenvalue Method DEM [3,6]) problem formulation. When applying DEM we can obtain discrete solution (in the nodes of body discretization) which is continuous for example with respect to the time. In contrary to the analytical approach the Discrete Eigenvalue Method for solution the problem within the body of complex shape what is the significant feature of the method. Generally DEM is considered to be an effective tool for solving certain class of heat conduction (and other) problems involving for example high-speed variation processes, problems of thermal shocks etc. [,4,6] as well as inverse heat conduction problems [3].

Analogy between continuous and discrete formulation of spectral methods seems to be an interesting contribution to the theory of the spectral transformations. This analogy is analyzed in this paper upon the example of solution of Laplace differential equation governing with the non-source, steady-state temperature field. General assumptions and spectral transformations of FITM and DEM are presented in the paper. The most important analogical notations, formulations and transformations for analyzed spectral methods are gathered in the table 1.