ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1993

Seria: MECHANIKA z.113 Nr kol. 1198

Jerzy SKRZYPCZYK

Katedra Mechaniki Teoretycznej
Politechnika Śląska

# WYZNACZANIE DOKŁADNYCH CHARAKTERYSTYK PROBABILISTYCZNYCH W NIELINIOWYCH UKŁADACH DYNAMICZNYCH

Streszczenie. W pracy podano dokładną, z matematycznego punktu widzenia, metodę analizy probabilistycznej drgań w nieliniowych jednowymiarowych układach dynamicznych poddanych zakłóceniom o charakterze procesu stacjonarnego 2 rzędu. Na podstawie analizy równań Fokkera-Plancka uzyskuje się dokładne charakterystyki probabilistyczne trójwymiarowego wektora składającego się z przemieszczenia, prędkości i przyśpieszenia.

## DETERMINATION OF EXACT PROBABILISTIC CHARACTERISTICS IN NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS

Summary. The main feature of this report is mathematically rigorous foundations of a probabilistic analysis of vibrations in nonlinear dynamical systems driven by narrow-band stationary processes. Thus, utilizing the Fokker-Planck equations, the determination of the three-dimensional Markov vector with components the displacement, the velocity and the acceleration of the nonlinear oscillator can be circumvented.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОКЛАДНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Резюме. В работе был показан, математически точный метод статистического анализа колебаний в нелинейных динамических системах с одной степеню свободы при возмущениях имеющих характер стацйонарного процеса 2-го рода. На основе уравнений Фоккера-Планка мы получаем точные статистические характеристики вектора со составляющими перемещением, скоростъю и ускорением.

## 1. WSTĘP

W ciągu ostatnich lat metoda równań Fokkera-Plancka była wielokrotnie z powodzeniem stosowana do uzyskania dokładnych charakterystyk probabilistycznych sygnałów w pewnych układach dynamicznych, zwłaszcza w przypadkach stacjonarnych. Dotyczyło to zwłaszcza układów dynamicznych, w których zakłócenia były typu białego szumu [2-6,8-14].

Pewne wyniki zostały również osiągnięte w zakresie analizy układów, w których zakłócenie jest pewnym szerokopasmowym procesem stacjonarnym 2 rzędu [3-5,11]. W przypadku gdy nieliniowość układu dynamicznego jest przedziałami liniowa, analiza taka została podana dla pewnej klasy procesów stacjonarnych, niekoniecznie szerokopasmowych. Przydatność tej analizy ograniczają dość restrykcyjne założenia dotyczące funkcji nieliniowej. np ścisła monotoniczność [8,10-11].

Praca niniejsza zawiera matematycznie ścisłe podstawy analizy probabilistycznej drgań w nieliniowych jednowymiarowych układach dynamicznych poddanych zakłóceniom o charakterze procesu stacjonarnego 2 rzędu. Analizie poddano nieliniowy oscylator z liniowym tłumieniem wiskotycznym i nieliniową charakterystyką sprężystą, o której zakłada się jedynie, że jest wystarczająco regularna dla istnienia i jednoznaczności rozwiązania równania stochastycznego [1]. W szczególnym przypadku może być funkcją przedziałami liniową. Do analizy wykorzystywany jest aparat równań Fokkera-Plancka. Na tej podstawie uzyskuje się charakterystyki probabilistyczne trójwymiarowego wektora składającego się z przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia.

## 2. PRELIMINARIA

Rozpatrywany będzie jednowymiarowy układ drgający, którego ruch opisany jest nieliniowym równaniem różniczkowym w znormalizowanej formie

$$x(t) + \beta x(t) + F(x(t)) = z(t)\ , \qquad t \in R^1 \tag{1}$$

gdzie $(^{\cdot}) = \frac{d}{dt}$, $\beta$=const>0 oznacza współczynnik tłumienia wiskotycznego, a funkcja $F(x)$, $x \in R^1$ reprezentuje charakterystykę nieliniowej siły sprężystej. Zakładamy dalej, że $F(\cdot)$ jest przedziałami funkcją różniczkowalną.

Rozpatrujemy przypadek, gdy funkcja wymuszająca jest stacjonarnym procesem stochastycznym 2 rzędu ze średnią równą zeru i gęstością spektralną postaci

$$S_z(\omega) = \frac{S_0}{1+\omega^2\tau^2}\ , \qquad \omega \in R^1 \tag{2}$$

gdzie $S_0>0$ i $\tau$ są pewnymi stałymi.

W celu ustalenia uwagi przyjmujemy dalej, że gęstość spektralna dana jest następującą transformacją Fouriera

$$S_z(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_z(\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau\ , \qquad \omega \in R^1$$

gdzie $K_z(\cdot)$ oznacza funkcję korelacji pewnego procesu stochastycznego 2 rzędu $z(\cdot)$, stacjonarnego w szerokim sensie. W dalszej analizie pojawia się proces stochastyczny, zwany gaussowskim procesem białego szumu. Pod pojęciem tym będziemy rozumieć uogólniony proces stochastyczny, który jest dystrybucyjną pochodną procesu Wienera. Jego uogólniona funkcja korelacji jest, naturalnie, dystrybucją i będzie oznaczana w następujący sposób

$$K_\psi(\tau) = \mathrm{const}\cdot\delta(\tau)\ , \qquad \tau \in R^1$$

gdzie const oznacza intensywność białego szumu.

Jest sprawą ogólnie znaną, że proces $z(t,\omega)$ można otrzymać jako sygnał wyjściowy pewnego układu dynamicznego zwanego filtrem. W naszym przypadku, gdy gęstość spektralna procesu dana jest wzorem (2), równanie filtru przyjmuje postać następującą

$$\tau z(t,\omega) + z(t,\omega) = \sqrt{S_0}\ \psi(t,\omega) \tag{3}$$

gdzie $\psi(t,\omega)$ jest gausowskim białym szumem z jednostkową intensywnością.

## 3. ANALITYCZNE ROZWIĄZANIA RÓWNANIA FOKKERA-PLANKA

Jest znanym faktem, że równania Fokkera-Plancka zapisuje się na ogół dla układów dynamicznych (układów równań) z zakłóceniem typu białego szumu. Analiza istnienia i jednoznaczności rozwiązań znana jest również dla tego typu równań. Stąd wynika konieczność pewnych przekształceń równań (1) i (3). Nie jest trudne wykazanie,że standardowe dla układu równań podstawienie $y_1=x$, $y_2=x$, $y_3=z$ prowadzi do równań Fokkera-Plancka w postaci, dla której nie jest możliwe rozdzielenie zmiennych. W związku z tym dokonamy następującego podstawienia $y_1=x$ , $y_2=x$ , $y_3=x$ .

Teraz możemy zapisać równanie (4) w postaci układu równań pierwszego rzędu:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_2 \\
y_2 &= y_3 \\
y_3 &= -\beta y_3 - \frac{\partial F}{\partial y_1} y_2 - \frac{1}{\tau} y_3 - \frac{\beta}{\tau} y_2' - \frac{1}{\tau} F(y_1) + \frac{\sqrt{S_0}}{\tau} \psi
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Na podstawie standardowych rozważań, równanie Fokkera-Plancka wynikające z układu równań różniczkowych (4) przyjmuje postać następującą

$$
y_2 \frac{\partial w}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial w}{\partial y_2} = \frac{1+\beta\tau}{\tau} \frac{\partial}{\partial y_3}(w y_3) + y_2\left(\frac{dF}{dy_1} + \frac{\beta}{\tau}\right)\frac{\partial w}{\partial y_3} + \frac{1}{\tau} F(y_1)\frac{\partial w}{\partial y_3} + \frac{S_0}{2\tau^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y_3^2} \tag{5}
$$

gdzie $w = w^{(3)}(y_1, y_2, y_3), y_1, y_2, y_3 \in R^1$ oznacza funkcję gęstości prawdopodobieństwa.

W dalszym ciągu analizy założymy, że rozwiązanie równania (5) posiada pewne szczególne własności znane z opublikowanych wyników [2-5,8-12,14] analizy podobnych zagadnień. Przyjmiemy mianowicie, że prawdziwe jest założenie o możliwości rozdzielenia zmiennych w postaci

$$
w^{(3)}(y_1, y_2, y_3) = \Phi(y_1, y_3)\exp\left[\Psi(y_1, y_2)\right] \tag{6}
$$

gdzie $\Phi(\cdot,\cdot)$ i $\Psi(\cdot,\cdot)$ są pewnymi nieznanymi funkcjami.

Podstawienie funkcji (6) do równania Fokkera-Plancka (5) prowadzi do rozdzielenia zmiennych w równaniu (5) i do następujących dwóch równań

$$
y_2 \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + y_3 \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial y_2} = y_2\left(\frac{dF}{dy_1} + \frac{\beta}{\tau}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial y_3} \tag{7}
$$

$$
\frac{1+\beta\tau}{\tau} \frac{\partial}{\partial y_3}(\Phi y_3) + \frac{1}{\tau} F(y_1)\frac{\partial \Phi}{\partial y_3} + \frac{S_0}{2\tau^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_3^2} = 0 \tag{8}
$$

W naszych rozważaniach ograniczymy się do tzw waunków naturalnych, to znaczy do przypadku, gdy $y_i$, $i=1,2,3$ zmieniają się w granicach $\pm\infty$. Na podstawie złożonej analizy równań (7) i (8) możemy określić wynik końcowy

$$w^{(3)}(y_1,y_2,y_3) = N_5\exp\left[-\int\left(\frac{dF}{dy_1}+\frac{\beta}{\tau}\right)\frac{2\tau F(y_1)}{S_0}dy_1-\frac{\tau(1+\beta\tau)}{S_0}y_3^2-\frac{2\tau F(y_1)}{S_0}y_3\right.$$
$$\left.-\frac{\beta}{S_0}\left(1+\beta\tau+\tau^2\frac{dF}{dy_1}\right)y_2^2\right] \quad (9)$$

Dalej zakładać będziemy, że nieliniowa charakterystyka sprężysta jest funkcją ciągłą przedziałami liniową, przyjmiemy następujące oznaczenia

$$F(x) = F_i(x) = \omega_i^2 x + m_i \quad (10)$$

dla $x_i \le x < x_{i+1}$, $i=1,2,\dots,n$, $-\infty = x_1<x_2<\dots<x_n<x_{n+1} = +\infty$, gdzie $\omega_i$ i $m_i$ są pewnymi stałymi, po wykonaniu niezbędnych prostych całkowań otrzymamy

$$w_i^{(3)}(y_1,y_2,y_3) = C_i\exp\left(-\left[a_iy_1^2+b_iy_2^2+c_iy_3^2+d_iy_1y_3+e_iy_1+g_iy_3\right]\right) \quad (11)$$

gdzie $w_i^{(3)}(y_1,y_2,y_3)$, reprezentuje funkcję gęstości prawdopodobieństwa, $C_i$, $a_i,b_i,c_i,d_i,e_i,g_i$, są pewnymi stałymi $i=1,2,\dots,n$ określonymi w i-tym przedziale zmienności zmiennej $y_1$:

$$a_i = \frac{\omega_i^2}{So}\left(\omega_i^2\tau+\beta\right)$$

$$b_i = \frac{\beta}{So}\left(1+\omega_i^2\tau+\beta\tau\right) \quad (12)$$

$$c_i = \frac{\tau}{So}\left(1+\beta\tau\right) \qquad d_i = \frac{2\omega_i^2\tau}{So}$$

$$e_i = \frac{m_i}{So}\left(\omega_i^2\tau+\beta\right) \qquad g_i = \frac{2m_i\tau}{So}$$

dla $i=1,2,\dots,n$. Powyższe wyniki (12-13) są podobne do tych podanych w [11], różnica polega na tym, że zostały osiągnięte przy słabszych założeniach dotyczących nieliniowości, co pozwala na uwzględnienie interesującego przypadku, gdy $\omega_i = 0$.

LITERATURA

[1] Bunke H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen Mit Zufälligen Parametern, Akademie-Verlag, Berlin 1972.

[2] Caughey T.K.: Derivation And Application Of The Fokker-Planck Equation To Discrete Nonlinear Dynamic Systems Subjected To White Random Excitation, J.Acoust.Soc.Amer., Vol.35, N.11(1962), 1683-1692.

[3] Диментберг М.Ф.: Нелинейные колебания упругих панелей при случайных нагрузках, Изд.АН СССР, ОТН Механика и Машиностроение, Н.5 (1962), 102-109.

[4] Диментберг М.Ф.: К вопросу о колебаниях системы с нелинейной характеристикой под действием случайной силы, Прикладная Механика Т.2,вып.10, (1966), 10-15.

[5] Диментберг М.Ф.: Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами, Изд.Наука, Москва 1989.

[6] Gutowski R.,Swietlicki W.A.: Dynamika i drgania układów mechanicznych, PWN, Warszawa 1986.

[7] Красовский А.А.: Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем, Изд. Наука, Москва 1974

[8] Piszczek K.: Drgania zdeterminowane i przypadkowe układu o jednym stopniu swobody przy charakterystyce sprężystości w postaci linii łamanej, Rozpr. Inz. 1970, vol.18,nr4.

[9] Piszczek K.: Wpływ nieliniowości na niektóre charakterystyki drgań przypadkowych, Zag. Drgan Nielin., vol. 12, 113-127.

[10] Piszczek K.: Metody stochastyczne w teorii drgań mechanicznych, PWN, Warszawa 1982.

[11] Piszczek K., Niziol J.: Random Vibration of Mechanical Systems, PWN, Warszawa 1986.

[12] Risken H.: The Fokker-Planck Equation, Methods of Solution and Applications, Springer-Verlag, Berlin- Heidelberg- New York 1989.

[13] Skalmierski B., Tylikowski A.: Procesy stochastyczne w dynamice, PWN, Warszawa 1972.

[14] Sobczyk K.: Metody dynamiki statystycznej, PWN, Warszawa 1973.

Recenzent: Prof. Bogdan Skalmierski

Wpłynęło do Redakcji dnia 4. 10. 1992

Abstract

The main feature of this report is mathematically rigorous foundations of a probabilistic analysis of vibrations in nonlinear dynamical systems driven by narrow-band stationary processes. It is considered a one-dimensional vibrating system whose motion is described by the differential equation in the normalized form

$$\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + F(x(t)) = z(t) , \qquad t \in R^1$$

where $(\dot{\ }) = \frac{d}{dt}$, $\beta$=const>0 denotes a coefficient of linear viscous damping,

and the function $F(x)$, $x \in R^1$ represents the characteristic of the nonlinear elastic force. It's assumed further that $F(\cdot)$ is intervally differentiable.

We consider the case when the excitation force is a stationary 2-nd order stochastic process with a mean value equal to zero and a spectral density of the form

$$S_z(\omega) = \frac{S_0}{1+\omega^2\tau^2}, \qquad \omega \in R^1 \tag{2}$$

where $S_0 > 0$ and $\tau$ are some constants.

Thus, utilizing the Fokker-Planck equations, the determination of the density of the three-dimensional Markov vector with components the displacement, the velocity and the acceleration of the nonlinear oscillator can be circumvented. It is further presented that the density function has the following form

$$w^{(3)}(x,x,x) = \Phi(x,x)\exp\left(\Psi(x,x)\right)$$

where $\Phi(\cdot,\cdot)$ and $\Psi(\cdot,\cdot)$ are analytically determined functions.