ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1993

Seria: MECHANIKA z. 113 Nr kol. 1198

Bogdan WILCZYŃSKI

Wydział Mechaniczny
Wyższa Szkoła Inżynierska, Koszalin

MINIMALIZACJA SPIĘTRZENIA NAPRĘŻEŃ WOKÓŁ QUASI-OWALNEGO OTWORU W NIESKOŃCZONEJ TARCZY

Streszczenie. W artykule rozważa się problem doboru optymalnego kształtu quasi-owalnego otworu w nieskończonej tarczy. Celem jest minimalizacja naprężeń maksymalnych wokół otworu. Do opisu kształtu brzegu wykorzystuje się zmodyfikowane krzywe Beziera. Tarczę analizuje się metodą naprężeń fikcyjnych. Zadanie optymalizacji rozwiązuje się metodą sekwencyjnego programowanie liniowego.

MINIMIZING STRESS CONCENTRATION AROUND QUASI-OVALOID HOLE IN INFINITE PLATE

Summary. This paper is concerned with the shape optimal design of the boundary of the quasi-ovaloid hole subjected to inplane load with the object minimizing stress concentration. A special concept of segmented Bezier interpolants is adopted to locate the boundary of the holes. The plate is analysed using the Fictitious Stress method, and the optimization procedure is a Sequential Linear Programming method.

МИНИМИЗАЦИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ВОКРУГ КВАЗИОВАЛЬНОГО ОТВЕРСТИЯ В БЕЗКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ

Резюме. Рассматривается задача выбора оптимальной формы контура квазиовального отверстия в безконечной пластине из условия минимума концентрации напряжений. Уравнения формы контура записываются в виде специальных кривых Безиера. Пластинка анализировалась методом фиктивных напряжений. для решения оптимизационнои задачи принимается метод приведения её к последовательности задач линейного программирования.

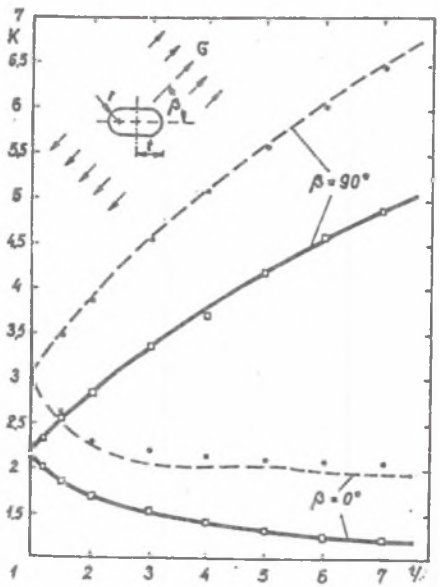
1. WSTĘP

Otwory w tarczach, płytach i innych elementach konstrukcyjnych powodują redystrybucję naprężeń i ich koncentrację. Zmniejszenie spiętrzenia naprężeń wokół otworu można uzyskać przez:

a) odpowiednie wzmocnienie otworu [10],
b) wykonanie dodatkowych otworów [5,6,10],
c) wykonanie otworu wydłużonego (owalnego) [6].

Istnieje również możliwość zmniejszenia naprężeń przez zmianę kształtu otworu [7-9].

W artykule omawia się zadanie optymalizacji kształtu otworu quasi-owalnego w tarczy (rys. 1,2), ze względu na naprężenia maksymalne.



Rys. 1. Współczynniki koncentracji naprężeń dla owalnego (---) oraz quasi-owalnego (——) (optymalnego) otworu
Fig. 1. Stress concentration factors for ovaloid (---) and quasi-ovaliod (——) (optimal) hole

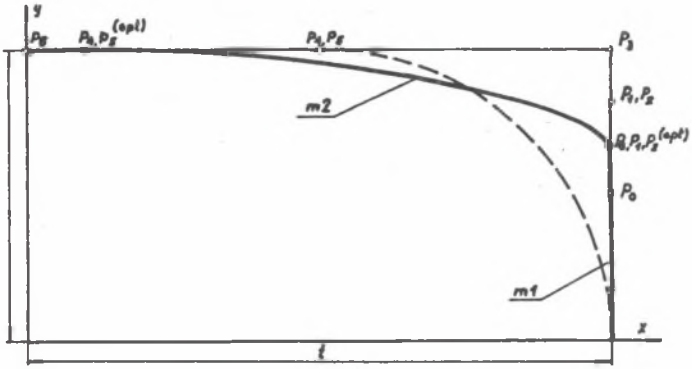
2. OPIS ALGORYTMU OPTYMALIZACJI

Do opisu kształtu brzegu wykorzystuje się krzywe Beziera. Jednosegmentowy wielomian rzędu m+1 (stopnia m) definiowany jest następująco:

$$P(t) = \sum_{i=0}^{m} P_i \frac{m!}{i!(m-i)!} t^i (1-t)^{m-i}, \qquad t \in [0,1] \tag{1}$$

gdzie P_i, $i=0,1,\ldots,m$ są punktami wiodącymi (kontrolnymi, Beziera) (rys.2).

W pracach [3,4] przedstawia się pewną modyfikację krzywych Beziera. Krzywa Beziera jest zdefiniowana przez punkty wiodące, tworzące tzw. trójkąt charakterystyczny i sterowana przez dwa parametry kształtu c_1 i c_2 (2).



Rys. 2. Optymalny kształt otworu quasi-owalnego dla t/r = 2 i $\beta = 0^0$
Fig. 2. Optimal shape of the quasi-ovaloid hole for t/r = 2 and $\beta = 0^0$

Punkty wiodące tworzące trójkąt charakterystyczny (rys.2) spełniają następujące związki:

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_{N-1} = P_a, \qquad P_{N+1} = P_{N+2} = \ldots = P_{2N-1} = P_b . \tag{2}$$

$$P_a - P_o = c_1(P_N - P_o), \quad P_b - P_{2N} = c_2(P_N - P_{2N}), \quad 0 < c_1, c_2 < 1, \quad m=2N.$$

Parametry te, których zmiana powoduje zmianę kształtu krzywej oraz położenie niektórych punktów wiodących, są zmiennymi decyzyjnymi.

Celem optymalizacji kształtu otworu quasi-owalnego jest minimalizacja naprężeń maksymalnych tj. min [max σ_e] dla danego obciążenia. Pierwotny problem min-max może być zamieniony na zwykły problem poszukiwania minimum przez wprowadzenie dodatkowej zmiennej decyzyjnej, jaką jest nieznane naprężenie maksymalne σ_{max}. Zadanie optymalizacji może być zapisane następująco

$$\min \sigma_{emax}(\underline{D}) \quad \text{przy ograniczeniach} \quad \sigma_{ej}(\underline{D}) - \sigma_{emax}(\underline{D}) < 0, \quad j=1,\ldots,l \tag{3}$$

gdzie $\underline{D}$ jest wektorem zmiennych decyzyjnych, a liczbą punktów, w których obliczane są wartości naprężeń zastępczych. Rozwiązania zadania (3) poszukuje się metodą sekwencyjnego programowania liniowego. Pole naprężeń w tarczy wyznacza się metodą naprężeń fikcyjnych [2]. Gradient naprężeń względem zmiennych decyzyjnych oblicza się metodą różnic skończonych.

3. PRZYKŁAD LICZBOWY

Brzeg otworu (rys.2) opisano dwoma makroelementami, z których jeden jest odcinkiem prostym (m1), a drugi krzywą Beziera (m2). Z powodu symetrii rozpatruje się ćwiartkę tarczy. Rozważa się dwa przypadki obciążenia:

rozciąganie tarczy w kierunku wydłużenia otworu ($\beta = 0^0$, rys. 1) oraz na kierunku ⊥ ($\beta = 90^0$). Zmiennymi decyzyjnymi są: D_1 - położenie punktu wiodącego P_0 (gdy $\beta = 0^0$), lub punktu P_6 (gdy $\beta = 90^0$), parametry kształtu $D_2 = c_1$, oraz $D_3 = c_2$. Początkowy wektor zmiennych decyzyjnych ma następujące wartości: (0.5 0.5 0.5) dla obciążenia $\sigma_x = 1$, oraz (t-0.5 0.5 0.5) dla obciążenia $\sigma_y = 1$. Wyniki obliczeń dla powyższych wariantów obciążenia zestawiono w tablicy 1.

Tablica 1

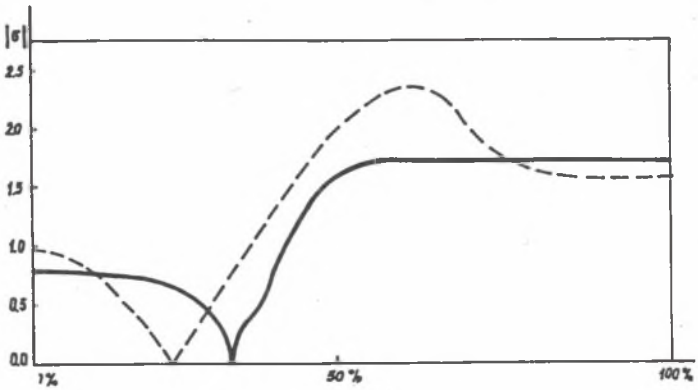
Wyniki optymalizacji dla różnych wariantów obciążenia

		σ^{opt}_{max}		$\underline{D}^{opt} = [D_1\ D_2\ D_3]$		Liczba iteracji	
Lp	t/r	$\beta=0^0$	$\beta=90^0$	$\beta = 0^0$	$\beta = 90^0$	$\beta=0^0$	$\beta=90^0$
1	1.2	2.020	2.309	0.747 0.01 0.132	0.965 0.130 0.01	5	5
2	1.5	1.871	2.517	0.707 0.01 0.135	1.250 0.130 0.01	5	5
3	2.0	1.706	2.827	0.653 0.01 0.125	1.730 0.131 0.01	5	5
4	3.0	1.517	3.357	0.566 0.01 0.134	2.706 0.133 0.01	5	5
5	4.0	1.411	3.810	0.502 0.01 0.141	3.688 0.134 0.01	5	5
6	5.0	1.341	4.213	0.452 0.01 0.151	4.674 0.136 0.01	6	6
7	6.0	1.297	4.579	0.419 0.01 0.160	5.664 0.137 0.01	4	4
8	7.0	1.263	4.910	0.333 0.09 0.161	6.655 0.138 0.01	4	4

Na rys. 1 pokazano wartości współczynników koncentracji naprężeń dla otworu owalnego (część krzywoliniowa jest łukiem o promieniu r) uzyskane przez Benca [1], obliczone metodą naprężeń fikcyjnych (test), oznaczone (o), oraz dla otworu o kształcie optymalnym dla różnych wartości t. Rys. 2 przedstawia optymalny kształt otworu dla t/r = 2 (tu r - mniejszy wymiar otworu). Położenie początkowe punktów Beziera oznaczono (o), a położenie tych punktów odpowiadające kształtowi optymalnemu przez pełne o. Na rys. 3 pokazano rozkład naprężeń normalnych (na kierunku stycznym do konturu) dla otworu owalnego (łuk kołowy) i optymalnego; oś pozioma przedstawia procentową długośc łuku.

4. PODSUMOWANIE

Zaprezentowany algorytm optymalizacji umożliwia znaczną, tj. 28-39% (w zależności od wymiaru t) redukcję naprężeń maksymalnych. Istotną cechą algorytmu jest opis kształtu brzegu krzywymi Beziera, sterowanymi 3, a praktycznie 2 zmiennymi decyzyjnymi, oraz efektywne połączenie metod: naprężeń fikcyjnych i sekwencyjnego programowania liniowego.



Rys. 3. Rozkład naprężeń: --- kształt początkowy, —— kształt optymalny
Fig. 3. Stress distribution: --- initial shape, —— optimal shape

LITERATURA

[1] BENCA S.: A comment on the stress concentration in an infinite plate containing an ovaloid hole. Comput. Struct., Vol. 25, 1987, s.297-298.

[2] CROUCH S.L., STARFIELD A.M.: Boundary element methods in solids mechanics, George Allen and Unwin, London 1983.

[3] HARADA K., NAKAMAE E.: Application of the Bezier curve to data interpolation, CAD, Vol. 14, 1982, s.55-59.

[4] HARADA K., KANEDA K., NAKAMAE E.: A further investigations of segmented Bezier interpolants, CAD, Vol. 16, 1984, s.186-190.

[5] HASEGAWA H., KUMAMOTO K., IMAI K.: Stress concentration of an elastic strip with circular holes under tension, JSME Int. Jnl, Vol. 30, 1987, s.906-911.

[6] JINDAL U.C.: Reduction of stress concentration around a hole in a uniaxially loaded plate, Jnl Strain Anal., Vol. 18, 1983, s.135-142.

[7] PEDERSEN P., CARSTEN L.L.: Design for minimum stress concentration by finite elements and linear programming, DCAMM Reports, The Technical University of Denmark, Lyngby, No 223, 1981.

[8] SCHNACK E.: An optimization procedure for stress concentration by the finite element technique, Int. Jnl Num. Meth. Engng, 1979, 14, s.115-124.

[9] XU CH., YU M.: Shape optimization of structures to minimize stress concentration, Comput. Struct., Vol. 36, 1990, s.491-497.

[10] Olesiak Z.: Koncentracja naprężeń, naprężenia kontaktowe, W Wytrzymałość elementów konstrukcyjnych, Red. Życzkowski M., PWN, Warszawa 1988, s. 492-567.

Recenzent: Prof. Eugeniusz Świtoński

Wpłynęło do redakcji dnia 05.10.1992

Abstract

The presence of a hole in an otherwise uniformly stressed plate (sheet) always results in a localized perturbation of the stress field and a consequent weakening of the plate due to stress concentrations. The stress concentration can be reduced if: a plate is suitably reinforced [10], by introducing additional (auxiliary, supplemental) holes in the direction of loading on either side of the original hole [5,6,10], or by making the hole oblong [6].

Today, it is well known that to decrease a stress concentration factor, a possibility exists to minimize stress by changing the shape of the construction parts.

The optimization method discussed uses Bezier's curves (1) to locate the boundary of the holes. A special concept of a segmented Bezier interpolants inside a so-called characteristic triangle is adopted. These interpolants can be controlled by two shape parameters (2). The shape parameters and the position of the control nodes are treated as design variables.

In this paper we consider the optimization problem aimed at finding the best shape for the quasi-ovaloid (oblong) hole in a plate subjected to in-plane loads (Figs. 1,2), if the stress concentration factor is to be minimized. Treating this problem equivalently, the objective of the design is to minimize a maximum stress i.e. min [max σ_e] for a given load. This original min-max problem can be converted to a simple min problem in terms of an unknown bound σ_{max} on the stresses. The stress minimization problem is written as (3), where l is the number of critical points, and $\underline{D}$ is a vector of design variables.

A computer program developed for solving the above problem is divided into two sections: a) optimizer and b) analyser. The optimizer of this program uses the sequential linear programming, where all functions are linearized. The analyser performs linear analysis of the 2-D machine components by using Fictitious Stress method and evaluates the gradients of stress constraints with respect to design variables by the finite difference method.

The results of optimization are presented in the Table 1 and in Figs. 1-3. About 28-39% reduction in stresses is obtained in comparison with the ovaloid hole, when the oblongity is in the direction of loading.