ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1993

Seria: MECHANIKA z.113 Nr kol. 1198

Grzegorz ZBOIŃSKI

Instytut Maszyn Przepływowych w Gdańsku
Polska Akademia Nauk

MODEL MATEMATYCZNY PRZYROSTOWEGO PROBLEMU KONTAKTOWEGO Z TARCIEM DWÓCH CIAŁ SPRĘŻYSTYCH

Streszczenie. Omówiono ścisły model matematyczny przyrostowego problemu kontaktowego dwóch ciał termosprężystych poruszających się wspólnym ruchem unoszenia. Sformułowanie lokalne bierze za podstawę nieprzyrostowe równania liniowej teorii sprężystości i przyrostowe, nieliniowe równania mechaniki kontaktu. Odpowiednie sformułowanie wariacyjne opiera się na zasadzie Hamiltona.

MATHEMATICAL MODEL OF INCREMENTAL FRICTIONAL CONTACT PROBLEM OF TWO ELASTIC BODIES

Summary. The exact mathematical model of the incremental contact problem of two thermoelastic bodies in the common transportation motion is presented in the paper. The local formulation takes non-incremental linear elasticity equations and incremental, non-linear contact mechanics equations as a basis. The corresponding variational formulation is based on the Hamilton's principle.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРИРОСТА КОНТАКТНОГО ВОПРОСА С ТРЕНИЕМ ДВУХ УПРУГИХ ТЕЛ

Резюме. Обсуждена точная математическая модель приростной контактной проблемы двух термоупругих тел находящихся в совместном переносном движении. Локальная формулировка задачи базирует на неприростных уравнениях линейной теории упругости и приростных, нелинейных уравнениях механики контакта. соответствующая вариацённая формулировка задачи основывается на принципе Гамильтона.

1. WPROWADZENIE

Podejścia prowadzące do sformułowania problemu kontaktowego dwóch ciał sprężystych mogą być oparte na klasycznym opisie nieprzyrostowym lub opisie przyrostowym. W pierwszym przypadku równania sprężystości i równania mechaniki kontaktu przyjmują postać nieprzyrostową. Te ostatnie mogą być wyrażone w funkcji prędkości [1, 2, 3, 4] lub przemieszczeń całkowitych [5, 6, 7]. W drugim zaś przypadku w przyrostowych równaniach mechaniki kontaktu wykorzystuje się przyrosty przemieszczeń. Natomiast równania sprężystości mogą być zapisane w formie przyrostowej [8, 9] lub nieprzyrostowej [10, 11, 12].

Wadą pierwszego i ostatniego podejścia jest niezgodność kierunków wektorów tarcia i prędkości. Z kolei w przypadku drugiego i trzeciego podejścia powstaje trudność ze zdefiniowaniem wektora prędkości, ponieważ problem kontaktowy liniowej sprężystości ma charakter kinetostatyczny.

Oryginalne sformułowanie lokalne i wariacyjne problemu przedstawione w pracy bierze za podstawę nieprzyrostowe równania liniowej sprężystości i przyrostową postać równań mechaniki kontaktu. Kierunki sił tarcia zdefiniowane są w funkcji wektora przyrostów poślizgu aproksymującego wektor prędkości, natomiast wektor przyrostów poślizgu w funkcji przyrostów przemieszczeń.

2. MODEL MATEMATYCZNY PROBLEMU

2.1. Podstawy opisu przyrostowego

Rozważymy przyrostowy uogólniony, kinetostatyczny problem dwóch ciał termosprężystych znajdujących się w kontakcie. Naszym celem jest określenie ścieżki równowagi ciał w kolejnych chwilach czasu. Chwile czasu, który ze względu na kinetostatyczny charakter zadania jest parametrem problemu, rosną w stosunku do chwili początkowej t_o o wielkości Δt, $2\Delta t$, $3\Delta t$, ..., gdzie Δt jest przyrostem czasu. Znane jest rozwiązanie problemu w przedziale czasu od t_o do aktualnej chwili czasu t. Szukamy natomiast rozwiązania w chwili $t+\Delta t$. Obciążenie ciał rośnie w każdej kolejnej chwili czasu o pewną wartość od zera w chwili początkowej aż do pełnego obciążenia w chwili końcowej.

Ruch obu ciał a $(a=1,2)$ znajdujących się w kontakcie jest opisany w nieinercjalnym układzie odniesienia o początku Ox i współrzędnych kartezjańskich X^i $(i=1,2,3)$. Ruch ciał w układzie odniesienia jest skutkiem małych deformacji. Wspólny ruch unoszenia jest znany.

2.2. Sformułowanie lokalne

Równania liniowej teorii sprężystości dla rozważanego problemu przyjmują postać

$$\left.\begin{array}{l}\sigma^{ij}{}_{,j}+f^{i}-\overset{a}{\rho}(a^{i}+\Omega^{i}{}_{k}\Omega^{k}{}_{j}+E^{i}{}_{j})X^{j}\\ \varepsilon_{ij}=1/2(q_{i,j}+q_{j,i})\\ \sigma^{ij}=\overset{a}{D}{}^{ijkl}(\varepsilon_{kl}-\overset{a}{g}_{kl}\alpha T)\end{array}\right\},\quad X\in\overset{a}{V_o} \tag{1}$$

w objętości Vo każdego z ciał a. Stosujemy tutaj klasyczną symbolikę i notację tensorową. Tensory stałych sprężystych, naprężeń i odkształceń są oznaczone odpowiednio D^{ijkl}, σ^{ij} i ε_{ij}. Wielkości f^{i} i q^{i} reprezentują wektory sił masowych i przemieszczeń. Wielkość a^{i} jest wektorem zadanych przemieszczeń translacyjnych, natomiast tensory zadanej prędkości kątowej i przyśpieszenia kątowego są zdefiniowane za pomocą odpowiednich wektorów prędkości i przyśpieszenia kątowego, tzn. $\Omega_{ij}=-\varepsilon_{ijk}\omega^{k}$, $E_{ij}=-\varepsilon_{ijk}e^{k}$, gdzie ε_{ijk} jest symbolem permutacyjnym. Zakładamy, że odkształcenia wstępne spowodowane są gradientami temperatury, przy czym g^{ij} oznacza tutaj tensor metryczny, α zaś jest współczynnikiem rozszerzalności objętościowej a T charakteryzuje stacjonarne pole temperatur.

Naprężeniowe i przemieszczeniowe warunki brzegowe na częściach Po i Qo powierzchni obu ciał zapisujemy w klasycznej postaci

$$\begin{array}{l}\sigma^{ij}\nu_{j}=p^{i},\quad X\in\overset{a}{P_o},\\ \left.\begin{array}{l}q^{i}=d^{i}\\ \sigma^{ij}\nu_{j}=r^{i}\end{array}\right\},\quad X\in\overset{a}{Q_o}.\end{array} \tag{2}$$

Wielkości d^{i} i p^{i} są wektorami zadanych przemieszczeń i obciążeń powierzchniowych, a r^{i} to wektor nieznanych reakcji powierzchniowych.

Całość uzupełniają nieliniowe równania mechaniki kontaktu obowiązujące na wspólnej powierzchni ciał K

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma^{ij}\nu_j n_i = r_n\\
&\sigma^{ij}\nu_j t_{is}\delta_{st} = r_t\\
&q_n = h_n - h^{\circ}_n\\
&h_n r_n = 0\\
&h_n \le 0\\
&r_n \le 0\\
&s_t = \Delta q_t\\
&(s_t s_t)^{1/2}[(r_t r_t)^{1/2} + \mu r_n]0\\
&(s_t s_t)^{1/2} \ge 0\\
&(r_t r_t)^{1/2} + \mu r_n \le 0\\
&r_t = (r_s r_s)^{1/2}/(s_s s_s)^{1/2}\cdot s
\end{aligned}\right\}, \quad X\in K. \qquad (3)$$

Fizyczna i geometryczna nieliniowość tych równań wynika odpowiednio z założenia tarcia i przyjęcia jednostronnych kontaktowych więzów normalnych. Równania te definiujemy z pomocą wielkości n_i i t_{is} (s=1,2), które są odpowiednio wektorem jednostkowej normalnej zewnętrznej i pseudotensorem dwóch jednostkowych stycznych do powierzchni ciała pierwszego (a=1). W równaniach tych δ_{st} oznacza deltę Kroneckera. Wektor szczeliny zdefiniowany jest z pomocą szczeliny początkowej h°_n i przemieszczeń normalnych q_n. Wektor przyrostów poślizgu s_t określony jest przez wektor przyrostu przemieszczeń stycznych Δq_t. Należy podkreślić, że powierzchniowe reakcje kontaktowe zastosowane w równaniach (3) odnoszą się do ciała o niższym numerze porządkowym (a=1), natomiast wektory szczeliny, poślizgu, przemieszczeń i przyrostów przemieszczeń są zdefiniowane jako różnice pomiędzy odpowiednimi wektorami ciała pierwszego (a=1) i ciała drugiego (a=2).

2.3. Sformułowanie wariacyjne

Odpowiednie sformułowanie wariacyjne wykorzystuje funkcjonał energii potencjalnej uzupełniony o człony zawierające reakcje więzów

$$\sum_{a=1}^{2}\Big({}_{a}\int_{\overset{a}{V_o}}\{\overset{a}{D}{}^{ijkl}(\varepsilon_{ij}-g_{ij}\overset{a}{\alpha}T)\delta\varepsilon_{kl}-f^{i}\delta q_{i}-\overset{a}{\rho}[at^{i}+(\Omega^{i}{}_{k}\Omega^{k}{}_{j}+E^{i}{}_{j})]X^{j}\delta q_{i}\}dV_o+$$

$$-{}_{a}\int_{\overset{a}{P_o}}p^{i}\delta q_{i}dP_o-{}_{a}\int_{\overset{a}{Q_o}}r^{i}\delta q_{i}dQ_o\Big)+\int_{K}[-\mu p_{n}\delta(s_{t}s_{t})^{1/2}+$$

$$-r_{n}\delta(q_{n}-h_{n})-r_{t}\delta(\Delta q_{t}-s_{t})]dK\le 0. \tag{4}$$

Równania te uzupełniają następujące związki sformułowania lokalnego spełnione a priori

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_{ij}=1/2(q_{i,j}+q_{j,i})\\ \sigma^{ij}=\overset{a}{D}{}^{ijkl}(\varepsilon_{ij}-g_{ij}\overset{a}{\alpha}T)\end{array}\right\},\ X\in\overset{a}{V_o},$$

$$q^{i}=d^{i},\ X\in\overset{a}{Q_o}, \tag{5}$$

$$\left.\begin{array}{l}q_{n}=h_{n}-ho_{n}\\ h_{n}r_{n}=0\\ h_{n}\le 0\\ s_{t}=\Delta q_{t}\\ (s_{t}s_{t})^{1/2}[(r_{t}r_{t})^{1/2}+\mu p_{n}]=0\\ (s_{t}s_{t})^{1/2}\ge 0\end{array}\right\},\ X\in K.$$

Związki powyższe zapewniają równoważność sformułowania lokalnego opisanego równaniami (1), (2) i (3) oraz zasady wariacyjnej (4). Występujące w nich wielkości μ i p_n, to współczynnik tarcia i zadana wielkość wektora naprężeń normalnych na powierzchni kontaktu.

3. WNIOSKI KOŃCOWE

Zaproponowane sformułowanie lokalne przyrostowego uogólnionego problemu kontaktowego dwóch ciał sprężystych oparte na nieprzyrostowych równaniach sprężystości i przyrostowych równaniach mechaniki kontaktu, prowadzi do sformułowania wariacyjnego wykorzystującego funkcjonał energii potencjalnej z reakcjami więzów.

Przedstawione sformułowanie wariacyjne może być podstawą do wyprowadzenia odpowiednich równań przemieszczeniowej metody elementów skończonych i opartego na nich oryginalnego algorytmu obliczeń. Równania te oraz algorytm przedstawione są w pracy [10].

LITERATURA

[1] Michałowski R., Mróz Z.: Associated and non-associated sliding rules in contact friction problems. Arch. Mech., 30, 1978, 259-276.

[2] Kalker J. J.: The principle of virtual work and its dual for contact problems. Ing. Arch., 56, 1986, 453-467.

[3] Kalker J. J.: Mathematical models of friction for contact problems in elasticity. Wear, 113, 1986, 61-77.

[4] Klarbing A.: Examples of non-uniqueness and non-existence of solutions to quasistatic contact problems with friction. Ing. Arch., 60, 1990, 529-541.

[5] Panagiotopoulos P. D.: A nonlinear programming approach to the unilateral contact- and friction-boundary value problem in the theory of elasticity. Ing. Arch., 44, 1975, 421-432.

[6] Oden J. T., Pires E. B.: Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity. J. Appl. Mech. 50, 1983, 67-76.

[7] Kikuchi N., Oden J. T.: Contact problems in elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods, SIAM, Philadelphia 1988.

[8] Frederiksson B.: On elastostatic contact with friction, Rozprawa doktorska. Linköping Inst. Technol., Linköping 1976.

[9] Torstenfelt B.: Contact problems with friction in general purpose finite element computer programs. Comp. Struct. 16, 1983, 487-493.

[10] Zboiński G.: Numeryczna analiza naprężeń i odkształceń kinetostatyczw zamocowaniach łopatek maszyn wirnikowych. Rozprawa doktorska. Politechnika Gdańska, Gdańsk 1990.

[11] Zboiński G.: The incremental variational principles for frictional contact problems of linear elasticity. J. Non-Linear Mech. (przyjęto do druku w roku 1992).

[12] Zboiński G.: The incremental variational principle and finite element displacement approximation for frictional contact problem of linear elasticity. J. Appl. Mech. (przyjęto do druku w roku 1992).

Recenzent: Prof. Ryszard Gryboś

Wpłynęło do Redakcji dnia 6. 10. 1992.

Abastract

Variational principles are the basis of finite element methods in solid mechanics. It also refers to frictional contact problems of linear elasticity. There are to main approaches leading to these principles. They can be formulated either in the classical (non-incremental) or incremental form. In the former case the slip definition utilizes either velocities [1, 2, 3, 4] or displacements [5, 6, 7], while in the latter case displacement increments are applied in the slip definition and the elasticity equations can either be written in the incremental [8, 9] or non-incremental [10, 11, 12] form. The last, own original approach is presented in the paper, which takes the non-incremental equations of linear elasticity and the incremental form of the local contact mechanics equations as a basis. The slip increments are proposed to be a function of the displacement increments, while the tangential traction directions are defined with the slip increment vector.

The local formulation of the 3D frictional two-body contact problem under consideration consists of the linear elasticity equations (1) and the corresponding linear boundary conditions (2) written for each of two bodies. These equations are completed with the non-linear contact mechanics equations (3) written on the common contact area of the bodies. The geometrical and physical non-linearities are due to unilateral constraints and friction.

The variational formulation of the presented contact problem under consideration takes Hamilton's principle as a basis. The appropriate variational principle (4) takes inequality form due to unilateral constraints and friction bound inequality. This principle is completed with a'priori relations (5) of the local formulation in order to assure equivalence of the local and the variational formulations.