ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994

Seria: MECHANIKA z. 115 Nr kol. 1230

Janusz BOSS
Wydział Mechaniczny,
Wyższa Szkoła Inżynierska w Opolu
Grzegorz BRYLL, Zbigniew GARNCAREK,
Instytut Matematyki,
Wyższa Szkoła Pedagogiczna w Opolu

ZASTOSOWANIE METODY REDUKCJI STATYSTYCZNEJ W MECHANICE

Streszczenie. Przedstawiono nowy sposób oceny stanu układu wieloelementowego. Opiera się on na wykorzystaniu metody redukcji statycznej i pozwala na bardziej precyzyjną ocenę takiego układu, szczególnie wówczas, gdy reprezentuje on dużą populację.

APPLICATION OF THE STATISTICAL REDUCTION METHOD IN MECHANICS

Summary. In this work the new method of evaluation of multi-element system has been performed. This manner is grounded on using of the statistical reduction and allows more precision of the valuation of this system including case when the system is representing by large population.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКОЙ РЕДУКЦИИ В МЕХАНИКЕ

Резюме. Представлено новый метод оценки состояния многоэлементной системы. Способ основан методом статистической редукцйи и допускает он данную систему проверить с высокую точностью, даже и для систем многочисленных.

1. WPROWADZENIE

Metoda redukcji statystycznej została opracowana przez A. Ziębę [1] i jej pierwsze astosowanie dotyczyło badania populacji gwiezdnych oraz rozmieszczenia materii we wszechświecie. Później pojawiły się zastosowania tej metody do zagadnień przyrodniczych oraz ekonomicznych i społecznych. Nie wymaga ona skomplikowanych obliczeń matematycznych, a ponadto pozwala uzyskać takie informacje o badanej populacji, które na ogół nie są osiągalne za pomocą innych metod.

Metoda ta znalazła zastosowanie w niektórych zagadnieniach mechaniki. W pracy [2] wykazano jej przydatność do badania złożonych pól temperatury. Może być wykorzystana w badaniach struktury przepływu dwufazowego gaz-ciecz [3] oraz do oceny rozmieszczenia ziaren węgla w stali [4]. Autorzy referatu zastosowali tę metodę do oceny stanu mieszaniny ziarnistej [5]. Możliwe jest także zastosowanie tej metody do oceny układów ziarnistych występujących w innych procesach, jak fluidyzacja, transport pneumatyczny, rozdrabnianie czy wytwarzanie zawiesin.

2. ROZMIESZCZENIE N-ELEMENTOWEJ POPULACJI

W celu przedstawienia metody redukcji statystycznej rozważmy n-elementowy ($n>2$) układ jednakowych ziaren występujący na pewnym tle. Tłem tym może być druga substancja. Dla uproszczenia rozważań będziemy badać dwuwymiarowy rozkład ziarnowy na pewnym obszarze płaskim, np. na obszarze prostokąta. W metodzie redukcji statystycznej n-elementową populację zastępujemy populacją o mniejszej liczbie elementów N, dokonując redukcji na określony poziom.

Prostokąt K, na którym dowolnie rozmieszczono n elementów populacji, dzielimy na λ obszarów elementarnych o jednakowym polu. Te obszary elementarne grupujemy w tzw. obszary fundamentalne, z których każdy zawiera **u** obszarów elementarnych. Zakładamy, że liczba λ jest podzielna przez **u**.

W prostokącie K znajduje się λ/u obszarów fundamentalnych. Rozmieszczenie populacji n-elementowej w prostokącie można scharakteryzować poprzez porównanie ze sobą jej rozmieszczenia w różnych obszarach fundamentalnych.

Rozważmy funkcję:

$$P^{n}_{m1,m2,\ldots,mu} \tag{1}$$

która określa stosunek liczby obszarów fundamentalnych, zawierających w pierwszym obszarze elementarnym m_1, w drugim m_2, ..., w u-tym m_u elementów populacji do liczby

wszystkich obszarów fundamentalnych. Wartość funkcji (1) wyznaczamy z bezpośrednich zliczeń elementów w poszczególnych obszarach fundamentalnych.

Wzór na rozmieszczenie przypadkowe otrzymujemy następująco. Przyjmijmy, że na obszar K pada n ziaren badanego składnika mieszaniny w ten sposób, aby prawdopodobieństwo trafienia danym ziarnem w dany obszar elementarny było takie samo dla wszystkich ziaren i dla wszystkich obszarów elementarnych. Prawdopodobieństwo R^n_m trafienia m ziaren w jeden obszar elementarny wyraża się wzorem dwumianowym:

$$R^n_m = \binom{n}{m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^m\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^{n-m} \tag{2}$$

Niech $R^n_{m1,\ldots,mu}$ oznacza prawdopodobieństwo, że w jednym obszarze fundamentalnym znajduje się dokładnie

$$\sum_{i=1}^{u} m_i$$

ziaren (elementów populacji) tak rozmieszczonych, że w i-tym obszarze elementarnym jest ich m_i (i=1, ..., u).

Prawdopodobieństwo to wyraża się wzorem:

$$R^n_{m1,\ldots,mu} = R^n_{m1}R^{n-m1}_{m2}\ \ldots\ R^{n-\sum_{i=1}^{u-1} mi}_{mu} \tag{3}$$

Stąd wobec (2) otrzymuje się:

$$R^n_{m1,\ldots,mu} = \binom{n}{m1,\ldots,mu}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\sum_{i=1}^{u} m_i}\left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{n-\sum_{i=1}^{u} m_i}, \tag{4}$$

gdzie

$$\binom{n}{m1,\ldots,mu} = \frac{n!}{m_1!\ldots m_u!\left(n-\sum_{i=1}^{u} m_i\right)!} \tag{5}$$

3. REDUKCJA POPULACJI DO OKREŚLONEGO POZIOMU

Przez redukcję n-elementowej populacji (n>2) do poziomu N (N<n) rozumie się losowy wybór n_o=n-N ziaren tej populacji. Prawdopodobieństwo $T^{n-n_o}_{M1,\ldots,Mu}$ zdarzenia polegającego na tym, że po usunięciu n_o spośród n ziaren ustalony obszar fundamentalny o obszarach elementarnych, zawierających odpowiednio m_1, ...,m_u ziaren, przejdzie w

obszar fundamentalny o obszarach elementarnych zawierających odpowiednia $M_1, ..., M_u$ ziaren, gdzie $M_i \leq m_i$ $(i=1, ..., u)$

$$T^{n-n_0}_{M1,...,Mu} = \frac{1}{\binom{n}{n-n_0}} \binom{n-\sum_{i=1}^{u} m_i}{(n-n_0)-\sum_{i=1}^{u} M_i} \prod_{i=1}^{u} \binom{m_i}{M_u} \tag{6}$$

i gdzie

$$\prod_{i=1}^{u} \binom{m_i}{M_i} = \binom{m_1}{M_1}\binom{m_2}{M_2}\cdots\binom{m_u}{M_u} \tag{7}$$

Sumując po wszystkich obszarach fundamentalnych i uwzględniając równość $n-n_0=N$ otrzymuje się:

$$P^{N}_{M1,...,Mu} = \sum_{m1,...,mu} \frac{\binom{n-\sum_{i=1}^{u} m_i}{N-\sum_{i=1}^{u} M_i}}{\binom{n}{N}} \prod_{i=1}^{u} \binom{m_i}{M_i} P^{n}_{m1,...,mu} \tag{8}$$

Wzór (8) wyraża prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że po usunięciu n_0 ziaren z danego obszaru (prostokąta) otrzymamy obszar fundamentalny o obszarach elementarnych zawierających odpowiednio $M_1, ..., M_u$ ziaren.

Może się zdarzyć, że:

$$n-\sum_{i=1}^{u} m_i \langle N-\sum_{i=1}^{u} M_i \tag{9}$$

W takim przypadku przyjęto, że:

$$\binom{n-\sum_{i=1}^{u} m_i}{N-\sum_{i=1}^{u} M_i} = 0 \tag{10}$$

W pracy [6] wykazano, że rozmieszczenie przypadkowe n-elementowej populacji zredukowanej do poziomu N jest identyczny z rozmieszczeniem przypadkowym populacji N-elementowej. Twierdzenie to umożliwia porównywanie rozmieszczeń dla populacji zredukowanych do niższego poziomu N z rozmieszczeniem przypadkowym.

4. WSKAŹNIKI CHARAKTERYZUJĄCE POPULACJĘ

W niniejszej pracy omówiono tylko wskaźniki dla poziomu redukcji N=2. W tym przypadku rozważa się cztery wskaźniki:

1) Wskaźnik koncentracji

$$C = \frac{P_{0,2}^2 + P_{2,0}^2}{2R_{2,0}^2} \tag{11}$$

Można powiedzieć, że badana n-elementowa populacja jest zagęszczona, jeśli C>1, tj. jeżeli prawdopodobieństwo zdarzenia, że ziarna wybrane z niej w sposób losowy znajdą się w jednym obszarze elementarnym obszaru fundamentalnego, jest większe niż prawdopodobieństwo tego, że dwa ziarna wybrane losowo z n-elementowej populacji rozmieszczonej przypadkowo znajdą się w tym samym obszarze elementarnym obszaru fundamentalnego. Wskaźnik C przyjmuje wartość największą przy maksymalnej koncentracji, a więc gdy wszystkie ziarna znajdują się w jednym obszarze elementarnym. Jego wartość jest równa jeden dla rozkłądu przypadkowego (randomowego), a wartość mniejsza od jedności wskazuje na rozkład maksymalnie zdekoncentrowany (tj. jednorodny lub quasi-jednorodny). Gdy C=0, to mieszaninę elementów populacji określa się jako idealną.

2) Wskaźnik grupowania

$$g = \left(\frac{P_{1,1}^2}{R_{1,1}^2}\right)\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda - C}\right) \tag{12}$$

Jeżeli g>1, to można powiedzieć, że badana populacja jest zgrupowana. Zachodzi to wtedy, gdy prawdopodobieństwo znalezienia się dwóch ziaren wybranych z populacji losowo, po jednym w każdym obszarze elementarnym dwuelementowego obszaru fundamentalnego, jest większe niż analogiczne prawdopodobieństwo dla dwóch ziaren wybranych losowo z n-elementowej populacji rozmieszczonej przypadkowo.

3) Wskaźnik słabej anizotropii

$$a_1 = \left(\frac{P_{0,1}^2 - P_{1,0}^2}{R_{1,1}^2}\right)\left(\frac{1}{\lambda - (1 + C)}\right) \tag{13}$$

i wskaźnik mocnej anizotropii

$$a_2 = \frac{P_{0,2}^2 - P_{2,0}^2}{R_{2,0}^2} \tag{14}$$

Wskaźniki anizotropii a_1 i a_2 są liczbami względnymi. Jeśli $a_2>0$, to zagęszczenia występują częściej w drugich obszarach elementarnych niż w pierwszych, poszczególnych obszarach fundamentalnych. W przypadku $a_2<0$, zachodzi sytuacja odwrotna. Podobnie interpretuje się wskaźnik a_1. Dotyczy on raczej rozmieszczenia tła. Jeśli $a_1=a_2=0$, to żaden z dwu obszarów elementarnych danego obszaru fundamentalnego nie jest wyróżniony przez rozkład populacji.

LITERATURA

[1] A. Zięba; Badanie rozmieszczenia populacji. ZN WSP Opole, seria Matematyka z. 17 (1975), ss. 69-85.

[2] Z. Garcarek, J. Idzik: Degree of heterogeneity of thermal field - a method of evaluation. Int. J. Heat & Mass Transfer, v. 35, No 11, 1992, pp. 2769.

[3] Z. Garcarek, J. Idzik, W. Spisak: Three - circle method in the investigations of shapes of gas bubble clusters in two -phase flow. Chem. Eng. Sci., v. 46, 1991, pp. 2156.

[4] J. Sokołowski i in.: Metalografia ilościowa, Skrypt Pol. Śląskiej nr 839, Gliwice 1979.

[5] G. Bryll, Z. Garcarek, J. Boss: Zastosowanie metody redukcji statystycznej do opisu mieszaniny materiałów ziarnistych.,ZN WSI Opole (w druku).

[6] Z. Garcarek: Formalizm matematyczny metody redukcji statystycznej. ZN WSP Opole, seria Matematyka z. 25 (1987), ss. 39–52.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Eugeniusz Świtoński
Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1993 r.

Abstract

In the paper a possibility of an application of the statistical reduction method to some problems of mechanics (as e.g. investigations of thermal fields, the structure of two-phase flow of gas-liquid system, distribution of carbon grains in steel, estimation of grain mixturies states) is presented. Previously an analysis of distribution of the areas of strong galaxy clusteringwas performed with the help of the method.

To introduce a reader into the statistical reduction method we briefly repeat the mainidea of the method. It consist in elaboration of a suitable transformation of the observed disposition $P^{n}_{m1,m2,...,mu}$ into the $P^{N}_{M1,M2,...,Mu}$ disposition characterising the population after reduction to level N<n. This can be done if we take as the $P^{N}_{M1,M2,...,Mu}$ the expected values of these disposition $P^{n}_{m1,m2,...,mu}$ which characterise all the possible N-size samples of objects selected randomly from the investigated n-size population.

The indicators characterising the distribution of the original system are defined by means of expressions (11)-(14). By the statistical reduction method we obtain a more complete information about a given system as compared with usual traditional statistical methods.