ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994

Seria: MECHANIKA z. 115 Nr kol. 1230

Andrzej BUCHACZ, Maciej PASEK
Katedra Mechaniki Robotów i Maszyn Roboczych Ciężkich
Politechnika Śląska

ZASADA WIERZCHOŁKOWA W MODELOWANIU METODĄ HIPERGRAFÓW WIELOODCINKOWYCH UKŁADÓW PRĘTOWYCH O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH W SPOSÓB CIĄGŁY

Streszczenie. Praca dotyczy modelowania hipergrafami drgających w przestrzeni, wieloodcinkowych układów prętowych o parametrach rozłożonych w sposób ciągły. Opisano sposób przyporządkowania krawędziom grafu zupełnego hipergrafu przemieszczeń uogólnionych i sił uogólnionych. Pokazano zastosowanie zasady wierzchołkowej do grafu zupełnego trzynastowierzchołkowego hipergrafu modelu pręta drgającego wzdłużno-giętno-skrętnie.

APPLYING THE VERTEX RULE IN MODELLING OF MULTI-LINK BAR SYSTEMS CHARACTERISED BY CONTINUOUSLY DISPERSED PARAMETERS WITH THE AID OF HYPERGRAPH METHOD

Summary. This work concerns the hyperhraph method of modelling the 3-dimensional, vibrating multi-link mechanical systems characterised by continously dispersed parameters. The connection between the edges of completed graph and the hypergraph of generalised forces and dislocations is described here. An example of applying the vertex rule is shown for a completed graph of the hypergraph of 13 vertexes that models a lenghtwisely, flexurally and torsionally vibrating bar.

ПРИНЦИП В МОДЕЛИРОВАНИИ МЕТОДОМ ГИПЕРГРАФОВ МНОГООТРЕЗКОВЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

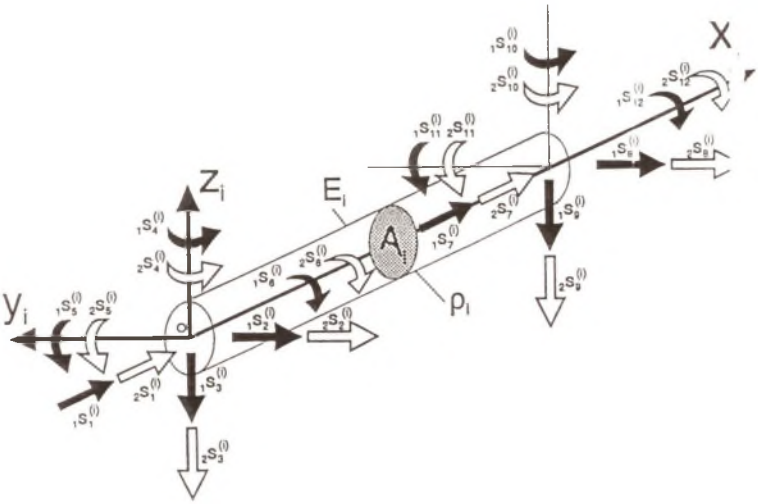
Резюме. Работа касается моделирования гиперграфами пространственно колеблющихця, многоотрезковыь стержниевых систем с паспределенными параметрами. Описан метод поставления в соотвтстве граниям полного графа гиперграфа обобощенных координат и обобощенных сил. Показано применение вершинного принципа для полного графа тринадцативершинного гиперграфа как модеЛи продольхо-изгибно-крытильно колеблющегося стержня.

1. MODEL PRĘTA DRGAJĄCEGO WZDŁUŻNO-GIĘTNO-SKRĘTNIE W POSTACI GRAFU ZUPEŁNEGO HIPERGRAFU

Rozpatrując i - ty element (rys.1), w k - odcinkowym układzie prętowym o odcinkowo stałym przekroju, przyjmuje się jego model w postaci hipergrafu ${}^{k}X_{f}^{(i)}$ (rys.2a) [1,2], którego graf zupełny pokazano na rys.2b, przyjmując oznaczenia:

a_{ij} - dla krawędzi łączących wierzchołki ${}_1X_i$ i ${}_1X_j$,

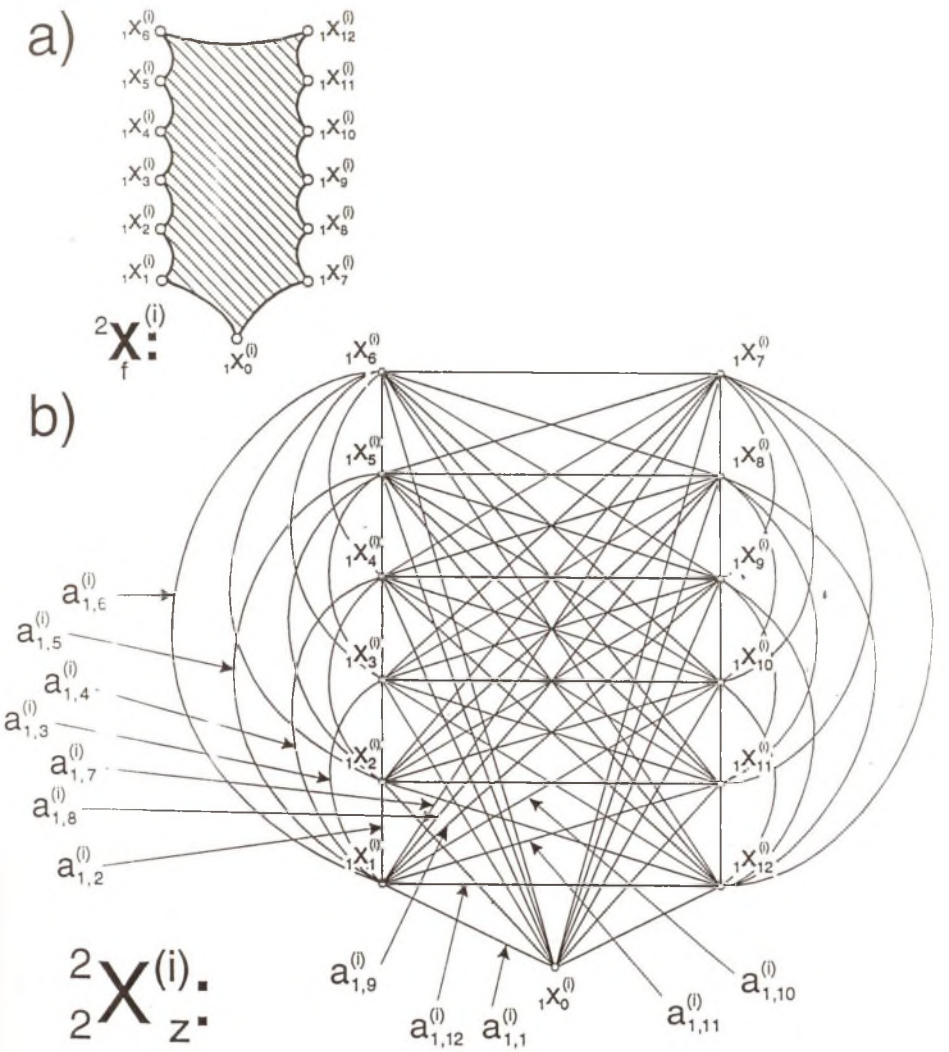
a_{ii} - dla krawędzi łączących wierzchołki ${}_1X_i$ i ${}_1X_i$.



Rys.1. *Ciągły model pręta drgający wzdłużno - giętno - skrętnie*

Fig.1. *A continuous model of a lenghtwisely, flexurally and torsionally vibrating bar*

Wszystkie elementy hipergrafu, przemieszczania uogólnione, stałe materiałowe oraz geometryczne pręta uzupełniono wskaźnikiem (i) z prawej strony u góry symbolu rdzeniowego.



Rys.2. *Hipergraf modelu pręta (a), i jego graf zupełny (b)*

Fig.2. *Hypergraph of the bar model (a) and its completed graph (b)*

Zależność pomiędzy przemieszczeniami uogólnionymi a siłami uogólnionymi dla i-tego pręta zapisano w postaci [3]:

$$\begin{bmatrix} {}_1S_1 \\ {}_1S_2 \\ \vdots \\ {}_1S_6 \\ \vdots \\ {}_1S_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{16} & \cdots & Y_{1,12} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2i} & \cdots & Y_{2,12} \\ & & \vdots & & & \\ Y_{61} & Y_{62} & \cdots & Y_{66} & \cdots & Y_{6,12} \\ & & \vdots & & & \\ Y_{12,1} & Y_{12,2} & \cdots & Y_{12,6} & \cdots & Y_{12,12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_2s_1 \\ {}_2s_2 \\ \vdots \\ {}_2s_6 \\ \vdots \\ {}_2s_{12} \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$lub \qquad {}_1S = Y\,{}_2S\,, \tag{2}$$

a przy założeniu nieosobliwości macierzy podatności Y przekształcono do postaci:

$$\begin{bmatrix} {}_2S_1 \\ {}_2S_2 \\ \vdots \\ {}_2S_6 \\ \vdots \\ {}_2S_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{16} & \cdots & Y_{1,12} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2i} & \cdots & Y_{2,12} \\ & & \vdots & & & \\ Y_{61} & Y_{62} & \cdots & Y_{66} & \cdots & Y_{6,12} \\ & & \vdots & & & \\ Y_{12,1} & Y_{12,2} & \cdots & Y_{12,6} & \cdots & Y_{12,12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_1s_1 \\ {}_1s_2 \\ \vdots \\ {}_1s_6 \\ \vdots \\ {}_1s_{12} \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$lub \qquad {}_2S = Y\,{}_1S\,, \tag{4}$$

gdzie:

$$Z_{ij} = \frac{\det Z_{ij}}{\det Z} \quad (i = 1,\ldots,12,\ \ j = 1,\ldots,12)\,,$$

$\det Z$ - wyznacznik macierzy sztywności,

$\det Z_{ij}$ - wyznacznik macierzy sztywności z opuszczonym wierszem i, oraz kolumną j.

Po zapisaniu sił uogólnionych działających na układ jako sumy sił wywołanych poszczególnymi przemieszczeniami uogólnionymi:

$$\left\{\begin{array}{l} 1\,{}_2s_1 = {}_2s_1({}_1s_1) + {}_2s_1({}_1s_2) + \cdots + {}_2s_1({}_1s_i) + \cdots + {}_2s_1({}_1s_{12}) \\ 1\,{}_2s_2 = {}_2s_2({}_1s_1) + {}_2s_2({}_1s_2) + \cdots + {}_2s_2({}_1s_i) + \cdots + {}_2s_2({}_1s_{12}) \\ \vdots \\ 1\,{}_2s_i = {}_2s_i({}_1s_1) + {}_2s_i({}_1s_2) + \cdots + {}_2s_i({}_1s_i) + \cdots + {}_2s_i({}_1s_{12}) \\ \vdots \\ 1\,{}_2s_{12} = {}_2s_{12}({}_1s_1) + {}_2s_{12}({}_1s_2) + \cdots + {}_2s_{12}({}_1s_i) + \cdots + {}_2s_{12}({}_1s_{12}) \end{array}\right\}, \tag{5}$$

gdzie ${}_2s_i({}_1s_j)$ oznacza i-tą siłę uogólnioną wywołaną j-tym przemieszczeniem uogólnionym, poszczególne sztywności z_{ij} wyrażają zależność pomiędzy i-tą siłą uogólnioną wywołaną j-tym przemieszczeniem ${}_2s_i({}_1s_j)$ a tym przemieszczeniem:

$$1\ {}_2s_i(s_j) = Z_{ij}1\,{}_1s_j\ . \tag{6}$$

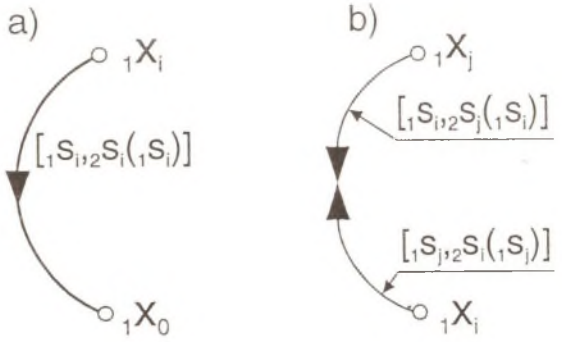
Dokonując przyporządkowania f_s krawędziom grafu zupełnego par: przemieszczenie uogólnione, siła uogólniona, jako:

$$f_s(a_{ii}) = ({}_1s_1,\ {}_2s_i({}_1s_1))\ ,$$

$$f_s(a_{ij})\quad dla\quad i \neq j = \begin{cases} ({}_1s_j\ ,\ {}_2s_i({}_1s_j)) & \text{dla zwrotu krawędzi } a_{ij} \text{ od wierzchołka } {}_1x_i \text{ do } {}_1x_j, \\ ({}_1s_i\ ,\ {}_2s_j({}_1s_i)) & \text{dla zwrotu krawędzi } a_{ij} \text{ od wierzchołka } {}_1x_j \text{ do } {}_1x_i, \end{cases} \tag{7}$$

czyli:

- krawędziom a_{ii} nadano orientację od wierzchołka ${}_1x_i$ do wierzchołka ${}_1x_0$ i przyporządkowano parę zmiennych $[{}_1s_i,\ {}_2s_i({}_1s_i)]$, gdzie ${}_2s_i({}_1s_i)$ oznacza siłę uogólnioną ${}_2s_i$, wywołaną przemieszczeniem ${}_1s_i$ (rys.3a),
- krawędziom a_{ij} dla $i \neq j$, przyporządkowano parę zwrotów przeciwnych i dwie pary zmiennych w następujący sposób:
- jeśli krawędź zorientowana jest od wierzchołka ${}_1x_i$ do wierzchołka ${}_1x_j$, to przyporządkowano jej parę zmiennych $[{}_1s_j,\ {}_2s_i({}_1s_j)]$, gdzie ${}_2s_i({}_1s_j)$ oznacza siłę uogólnioną ${}_2s_i$, wywołaną przemieszczeniem uogólnionym ${}_1s_j$ (rys.3b),
- jeśli krawędź zorientowana jest od wierzchołka ${}_1x_j$ do wierzchołka ${}_1x_i$, to przyporządkowano jej parę zmiennych $[{}_1s_i,\ {}_2s_j({}_1s_i)]$, gdzie ${}_2s_j({}_1s_i)$ oznacza siłę uogólnioną ${}_2s_j$, wywołaną przemieszczeniem uogólnionym ${}_1s_i$ (rys.3b),

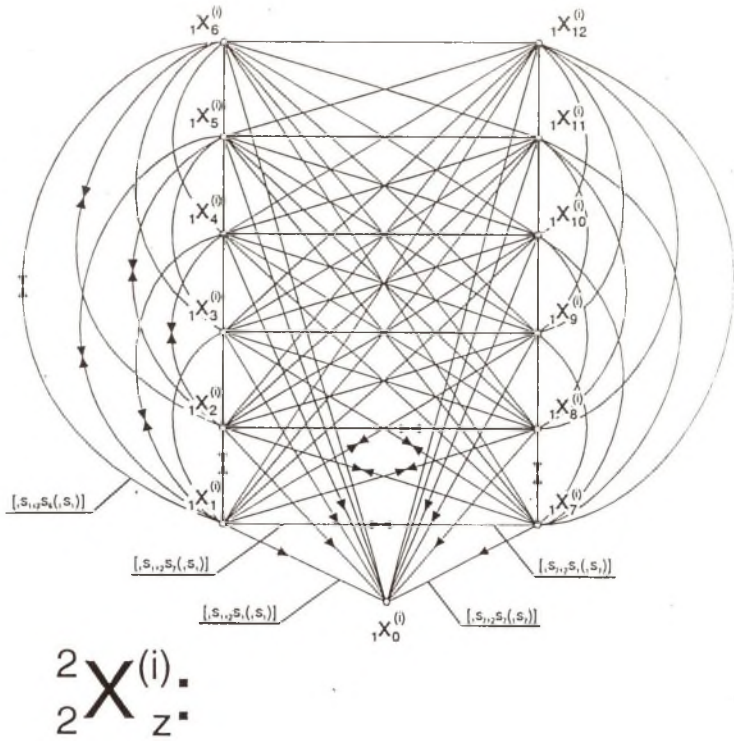


Rys.3. *Krawędzie a_{ii} (rys.3a) oraz a_{ij} (rys.3b) grafu zupełnego z przyporzadkowanymi parami zmiennych*

Fig.3. *Edges a_{ii} (Fig.3a) and a_{ij} (Fig.3b) of completed graph with pairs of variables*

otrzymano zorientowany i obciążony graf zupełny hipergrafu ^2X, oznaczony $^2\vec{X}_z$ i pokazany na rysunku 4. Zastosowanie zasady wierzchołkowej*) [2] dla dwunastu wierzchołków $_1x_i$ ($i \neq 0$) tego grafu prowadzi do otrzymania układu równań (5).

*)
Suma sił uogólnionych przyporządkowanych krawędziom wychądzącym z wierzchołka $_1x_i$ grafu $^2\vec{X}_z$ wynosi zero $\sum_{j=1}^{n} {}_2s_i({}_1s_j) = 0$



Rys.4. *Zorientowany i obciążony graf zupełny hipergrafu* ^2X

Fig.4. *Oriented and loaded completed graph of hypergraph* ^2X

LITERATURA

[1] Buchacz A., Pasek M., Wojnarowski J.: Modelowanie metodą hipergrafów drgających, przestrzennych, wieloodcinkowych mechanicznych układów prętowych o parametrach rozłożonych w sposób ciągły. ZN Pol.Śl., s.Mechanika, Gliwice 1993.

[2] Wojnarowski J.: Zastosowanie grafów w analizie drgań układów mechanicznych. PWN, Warszawa - Wrocław 1981.

[3] Buchacz A.: Synteza drgających układów prętowych w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. ZN Pol.Sl., s.Mechanika, Gliwice 1991.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jerzy Maryniak

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1993 r.

Abstract

Considering i-th element (Fig.1) in bar system of k-links, characterised by a continuously constant section, we assume that the model of a bar is presented in the form of the hypergraph ${}^{k}X^{(i)}_{f}$ (Fig.2a). The completed graph of this hypergraph is shown on the Fig.2b.

Dependence between generalised dislocations and generalised forces for i-th bar is expressed as (1). Assuming that the matrix of flexibilities **Y** is a nonpeculiar one, the equation (1) may be transformed to (3). The generalised forces working at the system are written down in the form of sum of forces caused by particular generalised dislocations (5).

Connecting the edges of the completed graph with pairs; generalised dislocation - generalised force (7), we can obtain an oriented and loaded completed graph of hypergraph ${}^{2}X$, signed as ${}^{2}\vec{X}_{z}$ and shown on Fig.4.

Applying the vertex rule (2) to twelve vertexes ${}_{1}x_{i}$ (i=0) of this graph we obtain the equations (5).