

Katarzyna CABAŃSKA
Wydział Matematyki i Techniki,
Wyższa Szkoła Pedagogiczna w Bydgoszczy

BELKA BERNOULLIEGO POSADOWIONA NA TRÓJPARAMETROWYM PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM

Streszczenie. W pracy wyprowadzono równanie różniczkowe linii ugięcia belki Bernoulliego posadowionej na jednokierunkowym, trójparametrowym podłożu sprężystym. Przyjęto, że belka jest w stałym kontakcie z podłożem sprężystym oraz że odpór podłoża na belkę jest tylko normalny. Wyniki obliczeń numerycznych porównano z wynikami modelu Własowa - Leontiewa i Winklera.

THE BERNOULLI'S BEAM RESTING ON THREE - PARAMETRIC, ELASTIC FOUNDATION

Summary. In this paper a differential equation of a line of a deflection of Bernoulli's beam resting on one - directional, three - parametric elastic foundation is presented. It is assumed a beam is in the continuous contact with an elastic foundation and, that an interaction of a foundation on this beam is only transverse. The numerical results for three - parametric foundation are compared to those for Winkler's and Wlasow's foundations.

БАЛКА БЕРНОУЛЛЕГО ОСНОВАНА НА ТРИПАРАМЕТРНОЙ УПРУГОЙ ОСНОВЕ

Резюме. В работе представлено дифференциальное уравнение упругой линии балки Берноуллего основанной на однонаправленном, трипараметрном упругой основе. Принято, что балка есть в постоянном контакте с упругой основой а также, что отпор основы на балку есть только нормальный. Результат вычисленных расчетов сравнено с результатами модели Власова - Леонтьева и Винклера.

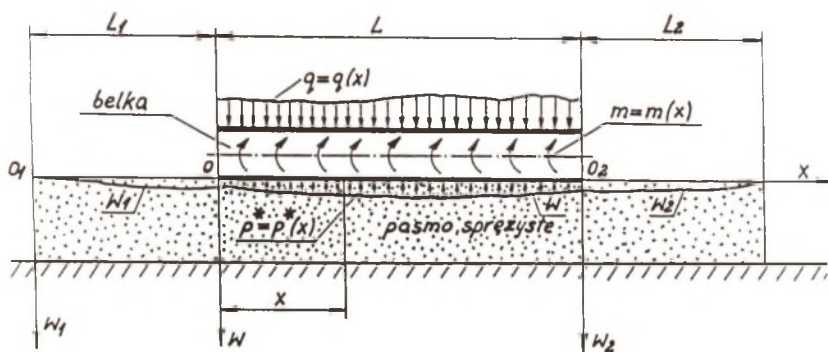
1. WSTĘP

W różnych konstrukcjach inżynierskich poszczególne ich elementy współpracują ze sobą. Współpracujące elementy można podzielić na dwie grupy. Do pierwszej grupy zalicza się podłoża i ośrodki sprężyste, które mają na celu integrować elementy drugiej grupy. Zazwyczaj właściwości mechaniczne, a zwłaszcza sprężyste, elementów pierwszej i drugiej grupy różnią się znacznie między sobą. Stąd wpływ wzajemnego oddziaływania na siebie tych elementów jest w wielu przypadkach istotny. Dlatego istnieje potrzeba badania tego zagadnienia. I tak np. w pracy [5] przedstawiono zagadnienie zginania belki Bernoulliego posadowionej na jednokierunkowym podłożu Winklera [3]. Natomiast w pracy [5] rozwiązano problem zginania belki Bernoulliego posadowionej na jednokierunkowym, dwuparametrowym podłożu Własowa [4].

W niniejszej pracy przedstawiono zagadnienie współpracy belki Bernoulliego z pasmem, które posiada cechy jednokierunkowego, trójparametrowego podłoża sprężystego [1,2].

2. ZAŁOŻENIA I CEL PRACY

Założono, że belka styka się na całej swej długości swą dolną powierzchnią z podłożem sprężystym. Na górną powierzchnię belki działa obciążenie normalne $q=q(x)$, moment rozłożony $m=m(x)$ oraz odpór $p=p(x)$ podłoża na belkę jest tylko normalny (rys.1).



Rys.1. Schemat belki na podłożu sprężystym

Fig.2. The scheme of a beam on an elastic foundation

Celem pracy jest wyznaczenie linii ugięcia $\bar{w}=\bar{w}(x)$ belki Bernoulliego posadowionej na proponowanym podłożu sprężystym [1,2] i porównanie wyników z wynikami w przypadku zastosowania podłoża Winklera [3] i Własowa-Leontiewa [4].

3. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE ZAGADNIENIA

Równanie różniczkowe linii ugięcia belki posadowionej na trójparametrowym podłożu sprężystym (rys.1) ma postać:

$$EJ \frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} + p^* = q - \frac{dm}{dx}, \quad (1)$$

gdzie: $\bar{w}=\bar{w}(x)$ - ugięcie belki, $q=q(x)$ - siła obciążająca belkę, $p^*=p^*(x)$ - odpór pasma sprężystego, E - moduł Younga materiału belki, J - moment bezwładności przekroju belki względem osi obojętnej.

Deformację podłoża, na którym posadowiona jest belka, opisano równaniem różniczkowym [2]

$$\frac{(2)}{p - k_3 \frac{d^2 p}{dx^2} = k_1 w - k_2 \frac{d^2 w}{dx^2}},$$

gdzie: k_1, k_2, k_3 są współczynnikami, które zależą od własności sprężystych pasma i jego grubości, $w=w(x)$ - ugięcie pasma sprężystego, $p=p(x)$ - siła obciążająca pasmo sprężyste.

Po skorzystaniu z założenia, że belka jest w stałym kontakcie z pasmem sprężystym, tzn. że $\bar{w}(x)=w(x)$ i $p^*(x)=p(x)$, a następnie rugując z układu równań (1), (2) $p(x)$, otrzymano ostateczną postać równania różniczkowego linii ugięcia belki, a mianowicie:

$$\frac{d^6 w}{dx^6} + a_1 \frac{d^4 w}{dx^4} + a_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + a_3 w = b_1 \left(q - \frac{dm}{dx} \right) + b_2 \left(\frac{d^2 q}{dx^2} - \frac{d^3 m}{dx^3} \right). \quad (3)$$

Współczynniki w (3) określone są następującymi wzorami:

$$a_1 = - \frac{\lambda^2 (1 - \psi)}{1 - \gamma}, \quad a_2 = \frac{1}{c(1 - \gamma)EJ}, \quad a_3 = \frac{-\lambda^2}{c(1 - \gamma)EJ}, \quad (4)$$

$$b_1 = - \frac{\lambda^2 (1 - \psi)}{(1 - \gamma)EJ}, \quad b_2 = \frac{1}{EJ},$$

natomiast:

$$\lambda = \frac{2}{h} \sqrt{\frac{k-1.5}{\nu_0}}, \quad \gamma = \frac{6-k}{12}, \quad (5)$$

$$\psi = \frac{\nu_0^2 k}{4(k-1.5)}, \quad c = \frac{h}{E_0 b},$$

gdzie: k - współczynnik ścinania w podłożu, h - wysokość pasma sprężystego, b - szerokość pasma sprężystego, E_0 - moduł Younga materiału pasma, ν_0 - liczba Poissona materiału pasma.

Rozwiązanie równania różniczkowego (3) ma następującą postać:

$$w = A Ch \alpha x \cos \beta x + B Ch \alpha x \sin \beta x + C Sh \alpha x \cos \beta x + D Sh \alpha x \sin \beta x + F Ch \phi x + G Sh \phi x + \int_0^x [A^* Ch \alpha (x-\bar{x}) \sin \beta (x-\bar{x}) + B^* Sh \alpha (x-\bar{x}) \cos \beta (x-\bar{x}) + C^* Sh \phi (x-\bar{x})] \left[b_1 \left(q - \frac{dm}{d\bar{x}} \right) + b_2 \left(\frac{d^2 q}{d\bar{x}^2} - \frac{d^3 q}{d\bar{x}^3} \right) \right], \quad (6)$$

gdzie α , β , ϕ są określone wzorami w pracy [2].

Stałe całkowania A , B , C , D , E , F , G , A^* , B^* , C^* wyznacza się z warunków brzegowych przedstawionych w pracy [2].

4. PRZYKŁAD

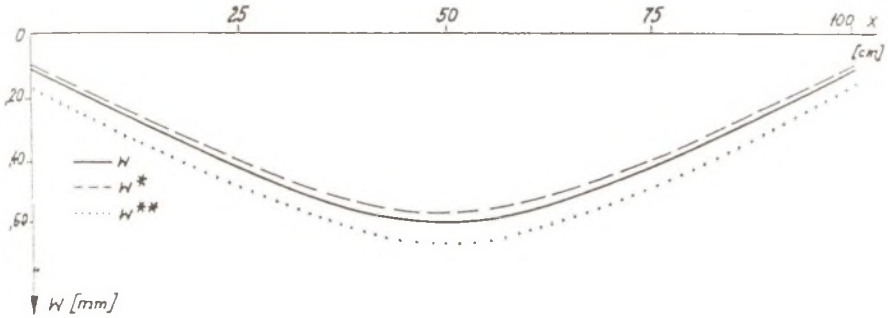
Obliczenia wykonano dla trzech przypadków. W przypadku pierwszym belkę Bernoulliego posadowiono na podłożu [1,2], w drugim na podłożu Własowa - Leontiewa [4] i trzecim na podłożu Winklera [3]. Na rysunku 2 pokazano graficznie wyniki w tych trzech przypadkach. Do obliczeń przyjęto obciążenie skupione w środku belki.

W celu odróżnienia graficznych wyników oznaczono je w modelu Własowa jedną gwiazdką, a w modelu Winklera dwiema gwiazdkami.

5. PODSUMOWANIE

Pokazane różnice wyników na wykresach (rys.2) są spowodowane koncepcją danego podłoża. Można wnioskować, że im większą liczbą parametrów jest opisany model danego podłoża, tym większa jest dokładność wyników obliczeń. Również można stwierdzić, że

wzrost rzędu równania opisującego problem zwiększa gładkość funkcji, która jest rozwiązaniem danego równania różniczkowego, a to powoduje lepszą dokładność obliczeń.



Rys. 2. Linie ugięcia belki posadowionej na podłożu sprężystym w przypadku siły skupionej P w punkcie $x_0=0.5l$

Fig. 2. The line of a deflection of a beam resting on an elastic foundation for a force P at midspan $x_0=0.5l$

LITERATURA

- [1] Cabańska K.: Deformacja niewinklerowskiego pasma sprężystego. Symposium "Modelowanie w Mechanice", PTMTiS, Beskid Śląski, 1989, ss. 81-88.
- [2] Cabańska K.: Współpraca belki z wieloparametrowym ośrodkiem sprężystym. Praca doktorska. Politechnika Warszawska. Warszawa 1992.
- [3] Winkler E.: Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit. Prag, Dominicus 1867, p.182.
- [4] Własow V.Z., Leontiew U.N.: Balki, plity i oboločki na uprugom osnovanii. Moskwa 1960.
- [5] Praca zbiorowa.: Fundamenty projektowanie i wykonawstwo. Arkady, Warszawa 1976. s. 315-328.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Antoni Jakubowicz

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1993 r.

Abstract

In this paper a problem of a mating of Bernoulli's beam with three - parametric elastic foundation [1,2] is presented (fig. 1). It is assumed that a beam is in the continuous contact with an elastic foundation and, that an interaction $p^* = p^*(x)$ of a foundation on this beam is only transverse. A line of a deflection of Bernoulli's beam resting on one directional, three - parametric, elastic foundation is described by the differential equation (1). A deformation of three - parametric, elastic foundation is presented by the differential equation (2), [2]. With the system of equations (1) and (2) is derived a final form of the differential equation (3). The solution of the differential equation (3) has the following form (6). The results of analysis of Bernoulli's beam i.e. displacements, for three - parametric foundation (w), Własow's (w^*) and Winkler's (w^{**}) foundations are presented in the form of diagrams (Fig.2). A beam is loaded at midspan ($x_0=0.5l$) by a concentrated force P . The results of numerical calculations for the beam resting on three - parametric foundation [1,2] are compared to those for two - parametric Własow's [4] and one-parametric Winkler's [3] foundations. Conclusions: The results for three - parametric elastic foundation are exactest.