ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994

Seria: MECHANIKA z. 115 Nr kol. 1230

Jerzy CABAŃSKI
Katedra Mechaniki Stosowanej
Akademia Techniczno - Rolnicza w Bydgoszczy

METODA BADANIA DRGAŃ WŁASNYCH UKŁADU DYSKRETNO - CIĄGŁEGO

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę rozwiazania zagadnienia drgań własnych układu dyskretno-ciągłego z tłumieniem wiskotycznym. Istotą tej metody są nieruchome węzły, które tworzą się na zespolonych więziach sprężystych w trakcie drgań własnych układu. W opracowaniu metody zastosowano funkcje zespolone zmiennej rzeczywistej.

METHOD OF RESEARCH OF FREE VIBRATION OF DISCRETE - CONTINUOUS SYSTEM

Summary. In this paper is presented a method of a solution of a problem of a free vibration of a discrete-continuous system with damping. An essence of this method are immovable nodes which creating on an elastic complex constraints in time of a free vibration of a system. In this method are application the complex functions of real variable.

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ СВОБОДНЬХ КОЛЕБАНИЙ ДИСКРЕТНО - НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМЫ

Резюме. В работе представлено метод решения задачи свободных колебаний дискретно - непрерывной системы с вязким гашением. Сущностью этого метода являются неподвижныйе узлы, которыйе создаваются на комплесных упругих связях во время свободных колебаний системы. В разработке метода применено комплексную функцию вещественной переменной.

1. WSTĘP

W konstrukcjach mechanicznych i budowlanych występuja najczęściej układy dyskretno-ciągłe.

Układ dyskretno-ciągły składa się z układu ciągłego z masą rozmieszczoną w sposób ciągły oraz z układów dyskretnych o masach skupionych.

Układem ciągłym może być struna, pręt, belka, powłoka, tarcza, płyta, korpus maszyny, rama itp.

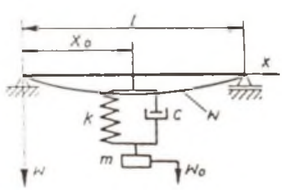
Rozwiązanie problemu brzegowego i początkowego układu dyskretno-ciągłego z tłumieniem jest zadaniem skomplikowanym [1,2].

Główną przyczyną tych komplikacji są trudności natury matematycznej spowodowane występowaniem tłumienia oraz opisem zjawiska drgań sprzężonym układem równań różniczkowych.

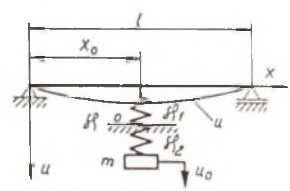
Aby uniknąć tych trudności podjęto próbę opracowania prostszej metody rozwiązania zagadnienia drgań własnych układu dyskretno-ciągłego.

2. OPIS METODY

Układem dyskretno-ciągłym z tłumieniem w postawionym zadaniu jest belka pryzmatyczna z masą rozmieszczoną w ciągły sposób oraz masa skupiona połączona z belką więzią lepko-sprężystą Kelvina-Voigta (rys. 1).



Rys. 1
Fig. 1



Rys. 2
Fig. 2

Zjawisko drgań własnych układu dyskretno-ciągłego (rys.1) jest opisane sprzężonym układem równań różniczkowych

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left[c\frac{\partial}{\partial t}(w_0 - w) + k(w_0 - w)\right]\delta(x - x_0) = 0\,,$$
$$m\frac{d^2 w_0}{dt} + c\frac{d}{dt}\left[w_o - w(x_0)\right] + k\left[w_0 - w(x_0)\right] = 0\,, \tag{1}$$

gdzie: E - moduł Younga materiału belki, I - moment bezwładności przekroju poprzecznego belki, μ - masa belki przypadająca na jednostkę długości belki, m - masa skupiona, c - współczynnik tłumienia elementu lepkiego, k - współczynnik sztywności elementu sprężystego, w=w(x,t) - funkcja ugięcia belki, $w_0 = w_0(t)$ - funkcja przemieszczenia masy skupionej, t - czas, d - delta Diraca.

Zastępując przemieszczenie rzeczywiste w=w(x,t) i $w_0=w_0(t)$ odpowiednio przemieszczeniem zespolonym u=u(x,t) i $u_0=u_0(t)$ oraz stosując podstawienie

$$u = Ze^{i\nu t} \qquad i \qquad u_0 = Z_0 e^{i\nu t} \tag{2}$$

w wyrazach zawierających tłumienie, układ równań (1) przyjmie zapis w zbiorze funkcji zespolonych:

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \chi(u_0 - u)\delta(x - x_0) = 0\,,$$
$$m\frac{d^2 u_0}{dt^2} + \chi\left[u_0 - u(x_0)\right] = 0\,, \tag{3}$$

$$gdzie \qquad \chi = k + i\nu c \tag{4}$$

jest zespolonym współczynnikiem sztywnosci więzi (rys. 2), natomiast

$$\nu = \omega + ih \tag{5}$$

jest zespoloną częstością drgań własnych układu, zaś

$$Z = X + iY \qquad oraz \qquad Z_0 = X_0 + iY_0 \tag{6}$$

jest odpowiednio zespolona amplituda drgań belki i masy skupionej.

Tworzący się w trakcie drgań na zespolonej więzi węzeł "O" [3,4] dzieli układ dyskretno-ciągły na układ ciągły i układ dyskretny o jednym stopniu swobody (rys. 2).

Drgania własne układu ciągłego, tj. belki z dodatkową podporą o zespolonej sztywności $\varkappa_1$ są opisane równaniem różniczkowym

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \chi_1 u\,\delta(x-x_0) = 0 \;. \tag{7}$$

Natomiast równanie różniczkowe drgań własnych układu dyskretnego, tj. oscylatora harmonicznego ma postać:

$$m\frac{d^2 u_0}{dt^2} + \chi_2 u_0 = 0 \;. \tag{8}$$

Zespolona sztywność więzi oscylatora harmonicznego określa wzór:

$$\chi_2 = \nu^2 m \;. \tag{9}$$

Zespolona sztywność dodatkowej podpory belki wyznacza się za pomocą prawa szeregowego połączenia więzi, a mianowicie

$$\chi_1 = \frac{\chi_2\chi}{\chi_2 - \chi} \;. \tag{10}$$

Po podstawieniu (4) i (9) do (10) otrzymuje się zależność:

$$\chi_1 = \frac{\nu^2 m(k+i\nu c)}{\nu^2 m - (k+i\nu c)} \;. \tag{11}$$

Podstawiając pierwszy wzór (2) do (7) otrzymuje sie równanie różniczkowe zespolonych amplitud drgań belki

$$EI\frac{d^4 Z}{dx^4} - \nu^2\mu Z + \chi_1 Z\delta(x-x_0) = 0 \;. \tag{12}$$

Rozwiązanie równania różniczkowego (12) ma postać:

$$\begin{aligned} Z &= A\sin\lambda x + B\cos\lambda x + CSh\lambda x + DCh\lambda x + \\ &- \frac{\chi_1}{2\lambda^3 EJ} Z(x_0)\left[Sh\lambda(x-x_0) - \sin\lambda(x-x_0)\right] H(x-x_0) \;, \end{aligned} \tag{13}$$

gdzie:

$$\lambda = \frac{\sqrt[2]{\nu^2\mu}}{EI} \;, \tag{14}$$

zaś $H(x\text{-}x_0)$ jest funkcją Heaviside'a.

Podstawą rozwiązania problemu brzegowego są następujące warunki brzegowe:

$$Z_{x=0} = 0\,, \qquad \frac{d^2Z}{dx^2}\Big|_{x=0} = 0\,,$$
$$Z_{x=l} = 0\,, \qquad \frac{d^2Z}{dx^2}\Big|_{x=l} = 0\,, \tag{15}$$
$$Z(x_0) - Z_{x=x_0} = 0\,.$$

Po podstawieniu funkcji (13) do (15) otrzymuje się jednorodny układ liniowych równań algebraicznych, który w zapisie macierzowym ma postać:

$$A\,X = 0\,, \tag{16}$$

gdzie: X jest wektorem kolumnowym niewiadomych A, C i Z(x), natomiast

$$A = \begin{bmatrix} \sin\lambda l & Sh\lambda l & -\dfrac{\chi_1}{2\lambda^3 EI}\left[Sh\lambda(1-x_0) - \sin\lambda(1-x_0)\right] \\ -\sin\lambda l & Sh\lambda l & -\dfrac{\chi_1}{2\lambda^3 EI}\left[Sh\lambda(1-x_0) + \sin\lambda(1-x_0)\right] \\ \sin\lambda x_0 & Sh\lambda x_0 & -1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

jest macierzą charakterystyczną układu równań (16).

Należy podkreślić, że ze względu na B=D=0 układ równań (16) został zredukowany do trzech równań.

Zespolone wartości (częstości) własne wyznacza się z równania charakterystycznego

$$\det A = 0\,. \tag{18}$$

Podstawiając częstości własne do (13) otrzymuje się zespolone formy drgań własnych belki.

Zespolone postacie drgań własnych masy skupionej wyznacza się z warunku równowagi węzła "O", a mianowicie

$$Z^{(n)}(x_0)\chi_1 = -Z_0^{(n)}\chi_2\,, \tag{19}$$

gdzie: $Z^{(n)}(x_0)$ jest zespoloną postacią drgań własnych belki, natomiast $Z_0^{(n)}$ jest zespoloną postacią drgań własnych masy skupionej.

Metoda rozwiązania problemu początkowego, tj. zagadnienia drgań poliharmonicznych układu dyskretno-ciągłego z tłumieniem jest analogiczna do przypadku układu dyskretno-ciągłego bez tłumienia. Jednak ostatecznym rozwiązaniem tego problemu jest tylko część rzeczywista rozwiązania zespolonego.

LITERATURA

[1] Nizioł J., Snamina J.: Vibration of discrete-continous system. "Mechanika Teoretyczna i Stosowana" , 29, 1/2, 1991, ss.149-160.

[2] Kasprzyk S.: Jednolity opis drgań układów mechanicznych w klasie funkcji uogólnionych. Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej. s: Mechanika, z. 18, 1989, ss.13-18.

[3] Cabański J.: Metoda wspomagająca projektowanie lepko-sprężystych eliminatorów drgań wymuszonych belki. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. s: Mechanika, z. 103, Gliwice 1991, ss.47-50.

[4] Cabański J.: Method of Calculation of Basic Parameters of Vibration Eliminators by Complex Functions. ZAMM. Z. angew. Math. Mech. 73, 4-5, 1993, pp.148-150.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Świder

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1993 r.

Abstract

The calculations were carried out for beam hinge at the ends with masse connected to it by visco-elastic constraint descri bed by the Kelvin - Voigt model (fig. 1). The phenomenon of free vibration of a discrete-continuous system (fig. 1) is described by system of differential equations (1). Substituting (2) into (1) gives a registration in a collection of the complex functions (3). On the complex constraints creating the node "O", [3,4], wich discreting the discrete-continuous system on two parts: the continuos system and the discrete system with one degrees of freedom (fig. 2). The free vibrations of the continuous system (the hinged beam on a support with a complex stiffness k) are desribed by differential equations (7). The differential equation of the free vibration of the discrete system has a form (8). The complex stiffness of a constraint are derived with forms (9) and (11). Substituting (2) into (7) obtains the differential equation of complex amplitude of a vibration of a beam (12). The solution of differential equations (12) has a form (13). Boundary conditions (15) quiding to the homogeneous system of algebraical linear equations (16). The charakteristic matrix of the system of equations (16) is resented by a equation (17). With the charakteristic equation (18) are calculated complex frequency of a free vibration. The complex form of a free vibrations of a beam are derived by halping (13), and concentrated mass (19).