

Henryk KOPECKI
Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa
Politechnika Rzeszowska

PODOBIENSTWO MODELOWE DLA REOLOGICZNYCH RÓWNAŃ STANU

Streszczenie. W pracy rozważa się zagadnienie podobieństwa modelowego dla równań konstytutywnych odpowiadających nieliniowej lepkości sprężystości. W szczególności rozważa się podobieństwo dla przypadku, gdy właściwości reologiczne ośrodka opisuje równanie konstytutywne sformułowane przez Z.Bychawskiego i A.Foxa. Zwrócono uwagę na podobieństwo opisu właściwości reologicznych i fotoreologicznych ośrodka.

MODEL SIMILARITY FOR RHEOLOGICAL CONSTITUTIVE EQUATIONS

Summary. The problem of model similarity for constitutive equations of nonlinear viscoelasticity is considered in the paper. Similarity for the case when rheological properties of the materials are presented by equation given by Z.Bychawski and A.Fox is considered in particular. There is paid attention to similarity in description of rheological and photo-rheological of model materials.

MODELLÄHNLICHKEIT FÜR RHEOLOGISCHE ZUSTANDSGLEICHUNGEN

Zusammenfassung. In der Arbeit wird das Problem der Modellähnlichkeit für die der nichtlinearen Viskoelastizität entsprechenden konstitutiven Gleichungen erörtert. Im besonderen wird die Ähnlichkeit betreffs des Falls, wenn die rheologischen Eigenschaften des Mediums durch die von Z.Bychawski und A.Fox formulierte konstitutive Gleichung beschrieben sind, in Betracht gezogen. Man hat auf die Ähnlichkeit der Beschreibung der rheologischen und photoreologischen Eigenschaften aufmerksam gemacht.

Rozległość zastosowań ustrojów nośnych we współczesnej technice ukonstytuowała obszary, w których uwzględnianie odkształceń opóźnionych, będących następstwem reologicznych właściwości materiału, staje się nieodzowne. Reologiczne właściwości ośrodka, w szczególności narażonego na działanie podwyższonej temperatury, mogą doprowadzić do zaistnienia znacznych, rozwijających się w czasie deformacji konstrukcji. Tego rodzaju stany zaawansowanych odkształceń charakteryzują się z reguły nieliniowością związków fizykalnych dla przyczyny i skutku, a także często nieliniowością geometryczną stanu odkształcenia i przemieszczenia. W odniesieniu do wielu konstrukcji, np. konstrukcji cienkościennych, jednoczesne uwzględnianie obu rodzajów nieliniowości staje się nieodzownym warunkiem właściwego opisu procesu deformacji ustrojów nośnych.

Już na etapie teoretycznego formułowania problemu napotykamy pewne trudności, z których najistotniejszą jest wybór adekwatnego równania stanu. Wynika to z faktu, iż większość doświadczalnych badań reologicznych właściwości materiału jest wykonywana na próbkach poddawanych jednoosiowemu rozciąganiu, a więc w warunkach odbiegających istotnie od stanu naprężenia, jaki charakteryzuje konstrukcje rzeczywiste.

Wspomniany problem nie stanowi ograniczenia badań modelowych wobec faktu, iż materiały modelowe wykazują również cechy reologiczne. W tej sytuacji formułowanie kryteriów podobieństwa dla zagadnień nieliniowych reologii konstrukcji powinno być poprzedzone wnikliwą analizą doboru adekwatnego równania konstytutywnego.

Procedurę formułowania kryteriów podobieństwa modelowego dla zagadnień, w których materiał konstrukcji wykazuje właściwości reologiczne, zilustrowano na przykładzie równania konstytutywnego odpowiadającego teorii nieliniowej lepkosprężystości [1], [2]. Teoria ta może posłużyć do opisu właściwości reologicznych obszernej klasy materiałów, zarówno metali, jak i niemetali. Formułuje ona prawo konstytutywne w postaci nieliniowego operatora całkowego, otrzymanego w wyniku uogólnienia na zakres nieliniowy zasady superpozycji odkształceń w czasie.

Podstawowymi założeniami teorii są: izotropowość, jednorodność i nieściśliwość materiału; deformacja natychmiastowa w ogólnym przypadku ma charakter nieliniowy.

Uogólniona zasada superpozycji została ujęta w formie całki Stjeltjesa, która istnieje przy założeniu ograniczonej wariacji składowych stanu naprężenia, a przy spełnieniu warunku całkowalności pochodnych tych składowych, staje się ona całką Riemanna. W wyniku związek między składowymi tensora odkształcenia $\epsilon_{ij}(t)$ i składowymi dewiatora naprężenia $s_{ij}(\tau)$ przyjmuje formę:

$$\varepsilon_y(t) = F_e[\sigma_e(t)]s_y(t) - \int_0^t s_y(\tau) \frac{d}{d\tau} \{H[t, \tau, \sigma_e(\tau)]\} d\tau. \quad (1)$$

W równaniu tym F_e oznacza nieliniową funkcję odpowiadającą deformacji natychmiastowej, H - uogólnioną funkcją pełzania, t - czas (chwile obserwacji), t_0 - chwilę początkową, τ - czas bieżący.

Zgodnie z przyjętą teorią jedną z możliwych form reprezentacji uogólnionej funkcji pełzania jest związek:

$$\frac{d}{d\tau} \{H[t, \tau, \sigma_e(\tau)]\} = F_c[\sigma_e(\tau)] \frac{d}{d\tau} [C(t - \tau)], \quad (2)$$

gdzie $C(t - \tau)$ jest współczynnikiem pełzania, a $F_c[\sigma_e(\tau)]$ - współczynnikiem zwiększającym.

W szczególnym przypadku, gdy współczynnik pełzania $C(t - \tau)$ jest liniową funkcją czasu, wówczas

$$\frac{d}{d\tau} \{H[t, \tau, \sigma_e(t - \tau)]\} = -F_c[\sigma_e(\tau)], \quad (3)$$

co uwzględnione w równaniu (1) prowadzi do następującej postaci równania konstytutywnego:

$$\varepsilon_y = F_e[\sigma_e(t)]s_y(t) + \int_0^t s_y(\tau) F_c[\sigma_e(\tau)] d\tau, \quad (4)$$

gdzie przyjęto, że $t_0 = 0$, a więc stan początkowy dla procesu pełzania zadany jest stanem natychmiastowym.

Funkcje F_e i F_c uzależnione od aktualnego stanu naprężenia przyjmujemy w postaci dwuparametrowych związków potęgowych:

$$F_e(\sigma_e) = \frac{3}{2} A \sigma_e^{n-1}, \quad F_c(\sigma_e) = \frac{3}{2} B \sigma_e^{m-1}, \quad (5)$$

gdzie A i B są stałymi materiałowymi, a m i n - liczbami charakteryzującymi stopień nieliniowości. Związki te uwzględnimy w równaniu konstytutywnym (4), otrzymując:

$$\varepsilon_y(t) = \frac{3}{2} A \sigma_e^{n-1}(t) + \frac{3}{2} B \int_0^t \sigma_e^{m-1}(\tau)^{m-1} s_y(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Równanie (6) jest identyczne z prawem pełzania metali podanym przez Odqvista w pracy [3].

Rozważmy inny przypadek szczególnie, gdy współczynnik pełzania $C(t-\tau)$ ma charakter wykładniczy, tj. gdy

$$C(t-\tau) = C_0 e^{-\gamma(t-\tau)}, \quad (7)$$

gdzie C i γ są stałymi materiałowymi. Wówczas równanie konstytutywne (1) przyjmuje formę:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2} A \sigma_{ij}^{n-1}(t) + \frac{3}{2} B C_0 \gamma \int_0^t \sigma_{ij}^{m-1}(\tau)^{m-1} e^{-\gamma(t-\tau)} s_{ij}(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Sformułujemy kryteria podobieństwa dla równań (6) i (8). W tym celu wprowadzamy następujące skale podobieństwa:

$$\begin{aligned} \kappa_B &= \frac{B^p}{B^m} & \kappa_m &= \frac{m^p}{m^m} & \kappa_\gamma &= \frac{\gamma^p}{\gamma^m} & \kappa_\sigma &= \frac{\sigma^p}{\sigma^m}, \\ \kappa_{C_0} &= \frac{C_0^p}{C_0^m} & \kappa_t &= \frac{t^p}{t^m} & \kappa_\tau &= \frac{\tau^p}{\tau^m} & \kappa_\varepsilon &= \frac{\varepsilon^p}{\varepsilon^m}. \end{aligned} \quad (9)$$

Indeksy p odnoszą się do materiału konstrukcji rzeczywistej (prototypu), a m - do materiału modelu.

Podstawiając do równania konstytutywnego (6) i (8) wielkości zaopatrzone indeksami odpowiednio p i m , otrzymujemy dwa formalnie identyczne równania odnoszące się do materiału konstrukcji rzeczywistej i modelowej. Z kolei, eliminując z jednego z równań (np. z równania dla materiału konstrukcji) wielkości oznakowane indeksem p (na podstawie przyjętych skal podobieństwa), otrzymujemy związek, który zachowuje identyczność z równaniem (8), jeśli spełnione są następujące relacje pomiędzy skalami podobieństwa:

- dla równania (8)

$$\kappa_\varepsilon = \kappa_A \kappa_\sigma^n \quad \kappa_n = 1 \quad \kappa_\varepsilon = \kappa_B \kappa_\sigma^m \kappa_{C_0} \quad \kappa_m = 1 \quad (10)$$

$$\kappa_\gamma \kappa_t = 1 \quad \kappa_\gamma \kappa_\tau = 1 \quad \text{stąd} \quad \kappa_t = \kappa_\tau, \quad (11)$$

- dla równania (6)

$$\kappa_\varepsilon = \kappa_A \kappa_\sigma^n \quad \kappa_n = 1 \quad \kappa_\varepsilon = \kappa_B \kappa_\sigma^m \kappa_\tau \quad (12)$$

Rozwiązane przykładowo szczególne przypadki ilustrują procedurę identyfikacji kryteriów podobieństwa dla reologicznych równań stanu. Mnogość tworzyw konstrukcyjnych - a co zatym idzie - różnorodność możliwości formalnego ujęcia reologicznych właściwości wymaga każdorazowo uściślenia postaci funkcji pełzania.

Oddzielnym problemem związanym z badaniami modelowymi ustrojów nośnych z materiałów uwydatniających właściwości reologiczne jest stosowanie metod polaryzacyjno-optycznych do wyznaczania rozkładów naprężeń i ich zmian w czasie. Wykonywanie tego rodzaju badań wymaga znajomości prawa konstytutywnego, opisującego fotoreologiczne właściwości materiału modelowego.

Podstawy teoretyczne formułowania tego rodzaju praw zostały zapoczątkowane w roku 1949 przez Mindlina w pracy [4]. Zasadniczą ideą przedstawioną we wspomnianej pracy jest koncepcja uzależnienia stałych elastoptycznych - naprężeniowej i odkształceniowej - jako wielkości zależnych od czasu. W roku 1950 Read opublikował bardziej ogólną teorię fotolepkosprężystości ośrodka ściśliwego [5], a w roku 1964 Williams i Arenz podali wyniki obszernych badań i analiz dotyczących materiałów fotolepkosprężystych [6]. Na podstawie otrzymanych wyników wyrazili opinię, iż do inżynierskich zastosowań związek między dwójłomnością wymuszoną i właściwościami lepkosprężystymi materiału może być przyjmowany jako liniowy. Matematycznym wyrazem takiego ujęcia problemu może być równanie podane przez Dilla w pracy [7]

$$\varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t) = N(0) \underline{C}(t) + \int_0^t \underline{C}(t-\tau) \frac{\partial N(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (13)$$

ujmujące różnice odkształceń głównych $\varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)$ w zależności od parametrów optycznych. Zwraca uwagę fakt, iż odkształceniowa "stała" elastoptyczna \underline{C} jest również funkcją czasu. Tę zależność funkcyjną można uściślić na podstawie próby pełzania materiału z jednoczesnym pomiarem zmian rzędu izochromy w czasie.

Łatwo zauważyć, że w przypadku szczególnym, gdy pomijamy zmiany w czasie wielkości występujących w równaniu (13), otrzymamy podstawowe równanie elastoptyki

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \underline{C}N \quad (14)$$

Do rozwoju fotolepkosprężystości istotny wkład wniosły również prace Theocarisa [8], [9] oraz Pindery [10], [11].

Badania modelowe ustrojów nośnych z materiałów lepkosprężystych oparte na metodach polaryzacyjno-optycznych nie należą do rozpowszechnionych. Przeprowadzanie tego rodzaju badań wymaga z jednej strony odpowiedniej bazy doświadczalnej do określania charakterystyk reologicznych materiału modelowego z jednoczesnym określeniem funkcjonalnej zależności, ujmującej efekty optyczne w czasie; ponadto pewne ograniczenie szerszego rozwoju badań może stanowić stosunkowo duży rozrzut właściwości fizycznych (głównie reologicznych) materiałów modelowych, w tym również optycznie czynnych. Z drugiej strony odpowiedź na pytanie, w jaki sposób zachowa się konstrukcja nie tylko w sensie charakteru deformacji w czasie, lecz również redystrybucji naprężeń, (które to informacje jesteśmy w stanie uzyskać w nieporównywalnie krótszym czasie w stosunku do eksperymentu przeprowadzanego z obiektem rzeczywistym), przemawia za doskonaleniem metodyki badań modelowych ustrojów nośnych z materiałów o właściwościach reologicznych, jednakże za cenę wszechstronnych badań materiałowych.

LITERATURA

- [1] Bychawski Z. Fox A.: Some fundamental concepts of the theory of nonlinear viscoelasticity. Arch. Mech. Stos., 6, 18, 1966.
- [2] Bychawski Z. Fox A.: Theory of nonlinear viscoelastic behavior. Arch. Mech. Stos., 4, 19, 1967.
- [3] Odqvist F.K.G. Hult J.: Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe. Springer, Berlin 1962.
- [4] Mindlin R.D.: Mathematical theory of photo-viscoelasticity. J. Appl. Phys., 20, 1949.
- [5] Read W.T.: Stress analysis for compressible viscoelastic materials. J. Appl. Phys., 21, 7, 1960.
- [6] Williams M.L. Arenz R.J.: The engineering analysis of linear viscoelastic materials. Exp. Mech. 4, 9, 1964.
- [7] Dill E.H.: On the theory of photo-viscoelasticity. Univ. of Washington, Dept. Aeron. and Astron., Rep. 63, 1, 1963.
- [8] Theocaris P.S.: Experimental solution of elastic - plastic plane stress problems. J. Appl. Mech. 12, 1962.
- [9] Theocaris P.S. Mylonas D.: Viscoelastic effect in birefringent coatings. J. Appl. Mech., 28 Trans Asme, 83, 1961.

- [10] Pindera J.T.: Remark on properties of a photoviscoelastic materials. *Exp. Mech.*, 6, 1966.
- [11] Pindera J.T.: Reologiczne własności materiałów modelowych. WNT, Warszawa 1962.
- [12] Kopecki H.: Problemy analizy stanów naprężenia ustrojów nośnych w świetle badań eksperymentalnych metodami mechaniki modelowej. *Zesz. Nauk. Polit. Rzeszowskiej, Mechanika z. 26*, Rzeszów 1991.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Eugeniusz Świtoński

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1993 r.

Abstract

In many technical problems it is necessary to take nonlinearities into consideration in order to properly describe stress and strain state. Even during the stage of the theoretic problem formulation we encounter some difficulties. The most important one is the selection of an appropriate state equation. Model testings could be helpful in it.

In such a case one should define a procedure to formulate criteria of model similarity. A constitutive equation referring to nonlinear theory of viscoelastic state is presented in the work as an example of such a procedure. The procedure formulates constitutive law in form of nonlinear integral operator being a result of a nonlinear generalization of the superposition principle for strains. The basic assumption of the theory are: isotropy, homogeneity, incompressibility of the material. Instantaneous deformation has in general case nonlinear character. The generalized principle of superposition is shown in form of Stjeltjes integral, which exists under assumption of limited variations of stress state components. If derivatives of these components are integrable, then the integral becomes Riemann integral. The presented procedure of model similarity criteria formulation could be used in experiments taking advantage of polarization. In such a case constitutive law describing photorheologic properties of the model material must be known. Theoretical basics of formulation of such laws, conceived by Mindlin and generalized by Read, Williams and Areuz, assume linear relationship between temporary double refraction and viscoelastic properties of the material. Such researches are also conducted at Rzeszów Technical University, lead by the author.