ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994

Seria: MECHANIKA z. 115 Nr kol. 1230

Marek KRAWCZUK, Wiesław OSTACHOWICZ
Instytut Maszyn Przepływowych
Polska Akademia Nauk w Gdańsku

WPŁYW POSTACI MACIERZY MAS NA CZĘSTOŚCI GIĘTNYCH DRGAŃ WŁASNYCH BELKI Z PĘKNIĘCIEM

Streszczenie. W pracy przedstawiono analizę numeryczną wpływu postaci macierzy mas na częstości giętnych drgań własnych belki swobodnie podpartej z pęknięciem. Rozpatrzono dwa modele: pierwszy, w którym macierz mas ma postać jak w przypadku braku pęknięcia, oraz drugi, w którym postać macierzy mas zależna jest od jego wymiarw. Stwierdzono, że różnice w wartościach obliczonych częstości giętnych drgań własnych belki są funkcją głębokości i położenia pęknięcia oraz analizowanej formy drgań.

INFLUENCE OF AN INERTIA MATRIX FORM UPON BENDING NATURAL FREQUENCIES OF A CRACKED BEAM

Summary. The paper presents the numerical analysis of the influence of the inertia matrix form upon bending natural frequencies of the simply supported beam. Two models are considered: in the first one the mass matrix has the same form as in the case of the uncracked beam, in the second one the mass matrix is a function of crack dimensions. The differences between calculated values of bending natural frequencies are a function of the crack depth and its location and also analyzed form of vibration.

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ МАТРИЦЫ ИНЕРЦИИ НА ЧАСТОТУ ИЗГИБНЫХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ С ТРЕЩИНОЙ

Резюме. В работе представлено нумерический анализ влияния матрицы инерции на частоту собственных колебаний балки. Анализировано две модели, первую в которой принято что матрица инерции имеет такую же самую форму как матрица инерции балки без трещины, вторую в которой приняо что матрица инерции зависит от величины трещины. Показано что разница между вычисленными частотами собственных колебаний завист от величины трещины, ей расположения и формы колебаний.

1. WSTĘP

Analiza wpływu pęknięć zmęczeniowych na dynamikę elementw konstrukcyjnych maszyn i urządzeń wymaga opracowania modeli matematycznych, które jak najdokładniej opisywałyby zjawiska, które one wywołują (redukcja częstości drgań własnych, wzrost amplitud drgań wymuszonych, sprzęganie postaci drgań, drgania parametryczne). W praktyce do modelowania pęknięć w elementach konstrukcyjnych stosowany jest cały szereg, przedstawionych poniżej metod:

(a) wprowadzenie w miejscu pęknięcia sprężyny o sztywności zastępczej obliczonej na podstawie praw mechaniki pękania [1],

(b) zastąpienie pęknięcia klasycznymi elementami skończonymi o zredukowanym polu przekroju [2] lub zredukowanych wspiczynnikach sprężystości [3],

(c) rozdzielenie węzlw elementów skończonych w miejscu pęknięcia i zagęszczenie siatki elementw klasycznych [4] lub osobliwych [5] wokół jego wierzcholka,

(d) zastosowanie specjalnych elementów skończonych z pęknięciami [6].

Cechą wspólną metody (a) i (d) jest to, że w modelu zakłada się jedynie zmiany sztywności, podczas gdy w metodach (b) i (c) również postać macierzy mas ulega modyfikacji. Powyższy brak spójności pomiędzy modelami skłonił autorów pracy do przeprowadzenia badań nad wpływem postaci macierzy mas na zmiany charakterystyk dynamicznych konstrukcji z pęknięciem. Analizę przeprowadzono na przykładzie swobodnie podpartej belki stalowej, stosując specjalny belkowy element skończony z pęknięciem.

2. MODEL DYSKRETNY BELKI

Do modelowania analizowanej belki zastosowano dwa typy belkowych elementów skończonych o dwóch węzłach i dwóch stopniach swobody w węźle. Nieuszkodzone części belki modelowano elementami belkowymi bez pęknięć (rys. 1d), podczas gdy uszkodzony odcinek zastąpiono specjalnym elementem belkowym z pęknięciem (rys. 1c).

2.1. Belkowy element skończony z pęknięciem

Belkowy element skończony z pęknięciem przedstawia rys. 1c. Poprzeczne, niepropagujące, otwarte pęknięcie jednostronne położone jest w środku elementu i dzieli go na dwie części. W celu wyznaczenia postaci macierzy mas i sztywności elementu wykorzystano przemieszczeniowe sformułowanie MES, zakładając dwie różne funkcje kształtu dla lewej u_1 i prawej u_2 części elementu:

$$u_1 = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \,, \tag{1}$$

$$u_2 = a_5 + a_6 x + a_7 x^2 + a_8 x^3 \tag{2}$$

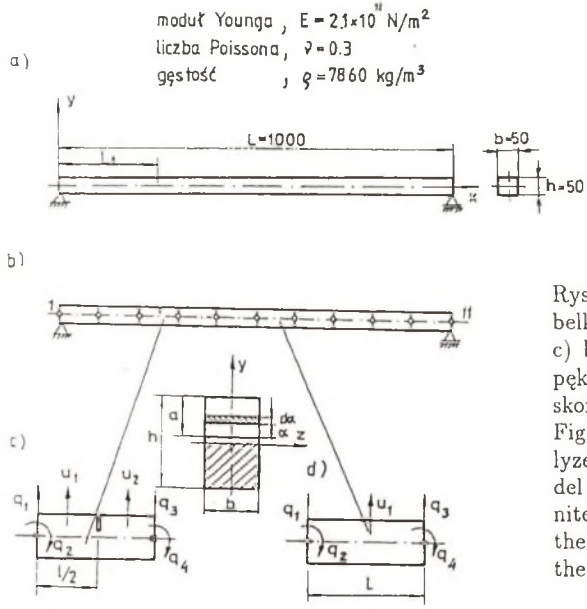
oraz przyjmując warunki brzegowe na końcach elementu:

$$q_1 = u_1(0), \quad q_2 = u_1'(0), \quad q_3 = u_2(l), \quad q_4 = u_2'(l) \tag{3}$$

i w miejscu pęknięcia:

$$\left.\begin{aligned} u_1(l_1) &= u_2(l_1), \quad u_1'(l_1) = u_2'(l_1) - \Theta u_1''(l_1), \\ u_1''(l_1) &= u_2''(l_1), \qquad u_1'''(l_1) = u_2'''(l_1), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

gdzie: $a_1 - a_8$ – stałe wyznaczane z warunków brzegowych, l_1, l – wymiary charakterystyczne elementu, Θ – dodatkowa podatność belki wywołana pęknięciem.



Rys. 1 a) wymiary analizowanej belki, b) model dyskretny belki, c) belkowy element skończony z pęknięciem, d) belkowy element skończony bez pęknięcia
Fig.1 a) dimensions of the analyzed beam, b) the discrete model of the beam, c) the beam finite element with the crack, d) the beam finite element without the crack

Uwzględniając warunki brzegowe na końcach elementu (3) i w miejscu pęknięcia (4) otrzymujemy dwie macierze funkcji kształtu w postaci:

$$\mathbf{N}_1 = \left[1, x, x^2, x^3\right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ G_1 & G_2 & -G_1 & G_3 \\ G_4 & G_5 & -G_4 & G_5 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$\mathbf{N}_2 = \left[1, x, x^2, x^3\right] \begin{bmatrix} 1 & G_6 & 0 & G_6 \\ 0 & G_7 & 0 & G_8 \\ G_1 & G_2 & -G_1 & G_3 \\ G_4 & G_5 & -G_4 & G_5 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

gdzie: $G_1 = -3/l^2$, $G_2 = -3/l^2 - 1/(2l + 2\Theta)$, $G_3 = -3/l^2 + 1/(2l + 2\Theta)$, $G_4 = 2/l^3$, $G_5 = 1/l^2$, $G_6 = l/2 - l^2/(2l + 2\Theta)$, $G_7 = l/(l + \Theta)$, $G_8 = \Theta/(l + \Theta)$.

Dodatkowa podatność belki Θ wywołana pęknięciem obliczana jest z zależności [6]:

$$\Theta = \frac{12\pi(1-\nu^2)h}{l} \int_0^{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} F_1(\bar{\alpha})\, d\bar{\alpha} \int_0^{1/2} d\bar{z}\,, \tag{7}$$

gdzie: $\bar{\alpha} = \alpha/h$, $\bar{z} = z/b$, (patrz rys. 1c).

Funkcja poprawkowa $F_1(\bar{\alpha})$ uwzględniająca skończone wymiary elementu dana jest związkiem [6]:

$$F_1(\bar{\alpha}) = \sqrt{\tan\lambda/\lambda}\,[0.752 + 2.02\bar{\alpha} + 0.37(1-\sin\lambda)^3]\,/\cos\lambda\,, \tag{8}$$

gdzie: $\lambda = \pi\alpha/2h$.

Mając wyznaczone macierze funkcji kształtu możemy określić macierze liniowej zależności pomiędzy naprężeniami i odkształceniami:

$$\mathbf{B}_1 = [0, 1, 2x, 3x^2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ G_1 & G_2 & -G_1 & G_3 \\ G_4 & G_5 & -G_4 & G_5 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$\mathbf{B}_2 = [0, 1, 2x, 3x^2] \begin{bmatrix} 1 & G_6 & 0 & G_6 \\ 0 & G_7 & 0 & G_8 \\ G_1 & G_2 & -G_1 & G_3 \\ G_4 & G_5 & -G_4 & G_5 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Ostatecznie macierz mas $\mathbf{M}_e$ oraz macierz sztywności $\mathbf{K}_e$ elementu mają postacie:

$$\mathbf{M}_e = \varrho A \int_0^{l/2} \mathbf{N}_1^t \mathbf{N}_1\, dx + \varrho A \int_{l/2}^{l} \mathbf{N}_2^t \mathbf{N}_2\, dx\,, \tag{11}$$

$$\mathbf{K}_e = \int_0^{l/2} \mathbf{B}_1^t \mathbf{D} \mathbf{B}_1\, dx + \int_{l/2}^{l} \mathbf{B}_2^t \mathbf{D} \mathbf{B}_2\, dx\,, \tag{12}$$

gdzie $\mathbf{D}$ oznacza macierz opisującą zależność pomiędzy stanem naprężeń i odkształceń w ciele liniowo sprężystym.

Analizując postacie macierzy funkcji kształtu $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ oraz liniowej zależności między naprężeniami i odkształceniami $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$,możemy stwierdzić, że w przypadku braku pęknięcia ($\Theta = 0$) macierze te mają identyczne postacie jak w przypadku elementu belkowego typu Bernoulliego-Eulera bez pęknięcia [7], a tym samym również macierz mas $\mathbf{M}_e$ i sztywności $\mathbf{K}_e$ redukuje się do postaci jak dla elementu bez pęknięcia.

3. OBLICZENIA NUMERYCZNE

Obliczenia numeryczne wykonano dla belki swobodnie podpartej o wymiarach i stałych materiałowych pokazanych na rys. 1a. Założono, że analizowanych będzie osiem pierwszych częstości giętnych drgań własnych belki. W pierwszej fazie obliczeń przeprowadzono

testy mające na celu wyznaczenie optymalnej liczby elementów pozwalających z zadowalającą dokładnością obliczyć te częstości. W wyniku przeprowadzonych obliczeń zdecydowano się na stosowanie w dalszej fazie obliczeń siatki złożonej z 10 elementów równej długości – tabela 1.

Tabela 1

Porównanie wyników obliczeń 8 pierwszych częstości giętnych drgań własnych belki bez pęknięcia

Częstość	Teoria belek Bernouliego-Eulera	MES model 10-elementowy	Błąd względny [%]
ω_1	736.290	736.342	0.0072
ω_2	2945.160	2945.669	0.0173
ω_3	6626.610	6630.587	0.0591
ω_4	11780.640	11800.934	0.1653
ω_5	18407.250	18481.118	0.4013
ω_6	26606.440	26718.701	0.8008
ω_7	36078.210	36591.137	1.4245
ω_8	47122.560	48211.286	2.3104

Tabela 2 ilustruje wpływ głębokości pęknięcia na wartości częstości giętnych drgań własnych belki wyznaczone dla dwóch przypadków: (A), w którym macierz mas elementu ma postać jak w przypadku elementu bez pęknięcia oraz (B), w którym macierz mas obliczana jest według algorytmu przedstawionego w punkcie 2 pracy. Obliczenia wykonano dla stałego położenia pęknięcia ($L_1/L = 0.25$).

Tabela 2

Częstości giętnych drgań własnych belki z pęknięciem dla dwóch postaci macierzy mas (położenie pęknięcia $L_1/L = 0,25$, głębokość $a/h = varia$)

Nr	(A) $[a/h = 0.5]$	(B) $[a/h = 0.5]$	Δ [%]	(A) $[a/h = 0.3]$	(B) $[a/h = 0.3]$	Δ [%]	(A) $[a/h = 0.1]$	(B) $[a/h = 0.1]$	Δ [%]
1	514.86	513.73	0.219	665.52	664.43	0.163	729.27	728.38	0.122
2	2104.75	2169.61	3.081	2529.29	2568.10	1.534	2892.22	2896.83	0.159
3	6020.03	6058.51	0.639	6267.89	6305.74	0.607	6574.54	6597.67	0.351
4	11800.93	11270.31	4.496	11800.93	11532.12	2.277	11800.93	11765.61	0.299
5	16785.01	17380.46	3.547	17510.46	17747.72	1.354	18341.54	18337.33	0.229
6	24000.95	23672.02	1.370	24836.53	25385.64	1.294	26366.87	26607.98	0.914
7	35296.27	31799.17	9.905	35639.11	34394.49	3.492	36384.94	36423.91	0.027
8	48211.28	45426.39	5.776	48211.28	46748.52	3.304	48211.28	48006.73	0.424

4. WNIOSKI

W pracy przedstawiono metodę tworzenia belkowego elementu skończonego z pojedynczym, niepropagującym, otwartym pęknięciem poprzecznym położonym w środku jego

długości. Opracowana metoda pozwala na uwzględnienie w postaci macierzy mas zmian sztywności elementu wywolanych pęknięciem, co do chwili obecnej dla tego typu elementów nie bylo możliwe.

W wyniku przeprowadzonych obliczeń numerycznych stwierdzono, że różnice pomiędzy obliczonymi częstościami giętnych drgań własnych belki dla dwóch modeli macierzy mas są zależne od: głębokości pęknięcia, postaci drgań oraz (wyniki przedstawione zostaną na Konferencji) położenia pęknięcia. Ogólnie możemy stwierdzić, że różnice wzrastają w miarę wzrostu głębokości pęknięcia oraz są większe dla wyższych postaci drgań.

LITERATURA

[1] Dimarogonas A.D., Massouros G.: Torsional vibration of a shaft with a circumferential crack, Eng. Fract. Mechanics, 15, 1980, ss.439-444.

[2] Yuen M.M.F.: A numerical study of the eigenparameters of damaged cantilever beam, J. Sound and Vibration, 103, 1985, ss.301-310.

[3] Cawley R.D., Adams R.D.: The location of defects in structures from measurements of natural frequencies. J. of Strain Analysis, 14, 1979, ss.49-57.

[4] Ostachowicz W.M., Krawczuk M.: Vibration analysis of a cracked beam, Computers and Structures, 36, 1990, ss.245-250.

[5] Shen M.H.H., Pierre C.: Natural modes of Bernoulli-Euler beams with symmetric cracks, J. Sound and Vibration, 138, 1990, ss.115-134.

[6] Krawczuk M.: Finite Timoshenko-type beam element with a crack, Engineering Transactions, 40, 1992, ss.229-248.

[7] Przemieniecki J.S.:Theory of matrix structural analysis, 1st ed., New York, McGraw-Hill, Inc., 1968.

Recenzent: Prof. dr hab. inż Tadeusz Burczyński

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1993 r.

Abstract

The paper presents an analysis of a form of the inertia matrix upon changes of bending natural frequencies of a cracked simply supported beam.

The beam is modelled by FEM. Two types of beam finite elements are applied. The undamaged parts of the beam are modelled by well known beam finite elements without a crack. The cracked part of the beam is substituted by a special beam finite element with the crack. A method of formation of the special beam finite element with the crack is presented. The method is based on displacement formulation of FEM and laws of fracture mechanics. Two different shape functions (1–2) and boundary conditions (3–4) are used

in order to determine shape function matrices (5–6) and matrices of stress-strain relation (9–10). Having the shape function matrices and matrices of stress-strain relation a mass matrix and a stiffness matrix of the element (11–12) are calculated.

Numerical calculations are carried out for the simply supported beam made of steel - Fig.1. In the first step the influence of the mesh upon bending natural frequencies is analyzed - Tab.1. Table 2 presents the changes of bending natural frequencies calculated for two forms of the mass matrix and the various crack depth.

The results of numerical calculations show that differences in results are a function of the crack depth and its location and also the mode of vibration.