ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994

Seria: MECHANIKA z. 115 Nr kol. 1230

Maciej KULISIEWICZ, Stanisław PIESIAK
Intytut Materiałoznawstwa i Mechniki Technicznej
Politechniki Wrocławskiej

SZACOWANIE CHARAKTERYSTYK SPRĘŻYSTO - TLUMIĄCYCH NA RÓWNANIA ENERGII UKLADÓW NIELINIOWYCH

Streszczenie. Traktując elementy sprężysto - tłumiące maszyn jako układy silnie nieliniowe, podano metodę ich identyfikacji w oparciu o równanie energii. Prezentowana metoda jest użyteczna w przypadku drgań okresowych dowolnego kształtu.

AN ESTIMATE OF THE MACHINE DAMPING - ELASTIC CHARACTERISTICS BY MEANS OF AN ENERGY EQUATION FOR NONLINEAR SYSTEMS

Summary. An identification way of machine damping - elastic elements which can be treated as markedly nonlinear systems is presented. In the way a balance energy equation is used. The method is useful in cases of arbitrary periodic vibration.

ЭСТИМАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК УПРУГО-ДЕМПФИРУЮЩИХ МАШИН НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Резюме. Принимая что упруго-демпфирующе элементы машин являются сильно нелинейными системами представлен метод их идентификации основан на уравнению энергии. Предложенный метод применим в случае периодичаеских осциллации любой формы.

1. OPIS PROBLEMU

W zagadnieniach konstruowania zawieszeń maszyn wyodrębnić można dwa zasadnicze problemy:

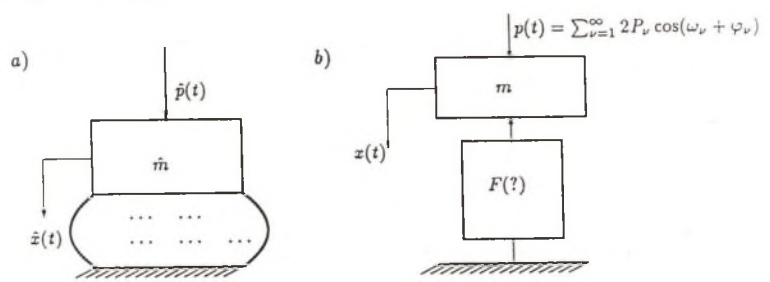
a) wpływ rodzaju zawieszenia na pracę maszyny,

b) analizę pracy zawieszenia w warunkach eksploatacji (żywotność, zmiany własności dynamicznych i tp.).

Wymagania techniczne stawiane obecnie nowoczesnym układom dynamicznym, a dotyczące głównie oszczędności energii i materiałów (konstrukcje lekkie), ciągle rosną. Stąd też zadowalające rozwiązania w wyżej wymienionej problematyce wymagają stosowania dokładnych (najczęściej nieliniowych !) modeli dynamicznych, co stwarza dodatkowe trudności w sferze modelowania i identyfikacji elementów sprężysto – tłumiących maszyn. Pewne nowe koncepcje w tej dziedzinie przedstawiono w pracach [1, 2]. Polegają one na możliwości wykorzystania do celów modelowania równania energii układu dynamicznego w przypadku drgań okresowych dowolnego kształtu. W pracy [2] podano przykład wykorzystania tego pomysłu dla układu zdegenerowanego z tarciem suchym. W niniejszej pracy skoncentrujemy się głównie na przypadku ogólnym ważnym dla nieliniowych charakterystyk tłumienia i sprężystości dowolnego kształtu. Przyjmijmy więc, że kształt funkcji restytucyjnej F opisującej oddziaływanie elementu sprężysto – tłumiącego na ruch masy m (por. rys. 1) opisuje funkcja $F(x, \dot{x})$, w której zachodzi separacja oddziaływań sprężystych od tłumiących, co możemy zapisać w postaci:

$$F(x, \dot{x}) = F_s(x) + F_t(\dot{x}), \tag{1}$$

w której funkcje $F_s(x)$ i $F_t(\dot{x})$ są dowolne nieliniowe. Założenie (1) daje się fizycznie sprawdzić (por. np. [3]).



Rys. 1. Schemat przyjętego modelu b) układu fizycznego a)
Fig. 1. Diagram of the accepted model b) of the physical system a)

Przedstawiona poniżej metoda postępowania umożliwia wyznaczenie kształtu tych funkcji. Funkcje $F_s(x), F_t(\dot{x})$ opisują oddziaływania sprężysto –tłumiące elementów maszyn, zwane dalej charakterystykami sprężysto – tłumiącymi.

2. IDEA ROZWIĄZANIA

Dla opisu idei rozwiązania ograniczymy się na wstępie do modelu opisanego równaniem:

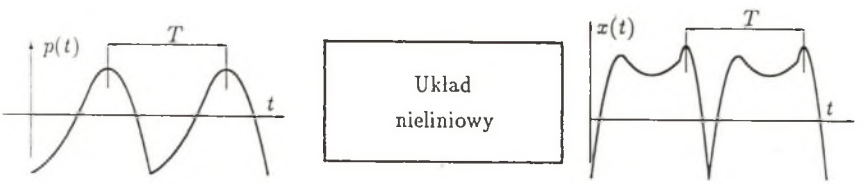
$$m\,\ddot{x} + k_1\,\dot{x} + k_3\,\dot{x}^3 + c_1\,x + c_3\,x^3 = p(t), \tag{2}$$

gdzie k_1, k_3, c_1, c_3 – stałe współczynniki rzeczywiste.

Załóżmy, że wymuszenie $p(t)$ i odpowiedź $x(t)$ tego układu są opisane przez dowolne funkcje okresowe o okresie T. Począwszy od dostatecznie dużego czasu t, w którym odpowiedź jest niezależna od warunków początkowych, założenie to jest spełnione zasadniczo dla układów fizycznych. Spełniony jest zatem warunek:

$$x(t+T) = x(t), \quad p(t+T) = p(t) \tag{3}$$

(por. rys. 2).



Rys. 2. Podstawowe założenie metody
Fig. 2. Basic assumptions of the method

Równanie energii dla układu (2) uzyskamy wymnażając je obustronnie przez $dx = \dot{x}dt$ i całkując w obrębie okresu T. Łatwo jest wykazać, że dla (3) zachodzi:

$$\int_0^T m\ddot{x}\dot{x}dt = \int_0^T (c_1 x + c_3 x^3)\dot{x}dt = 0, \tag{4}$$

skąd otrzymujemy:

$$k_1 L_1 + k_3 L_3 = L_p, \tag{5}$$

gdzie przez L_1, L_3, L_p oznaczono zmienne:

$$L_1 = \int_0^T \dot{x}\dot{x}\,dt, \quad L_3 = \int_0^T \dot{x}^3\dot{x}\,dt, \quad L_p = \int_0^T p\,\dot{x}\,dt\,. \tag{6}$$

Podobnie, wymnażając równanie (2) przez $d\dot{x} = \ddot{x}\,dt$ i całkując otrzymujemy:

$$\int_0^T (k_1\dot{x} + k_3\dot{x}^3)\ddot{x}dt = 0\,, \tag{7}$$

skąd

$$m\,\mathrm{L}_m + c_1\,\mathrm{L}_1 + c_3\,\mathrm{L}_3 = \mathrm{L}_p, \tag{8}$$

gdzie

$$\mathrm{L}_m = \int_0^T \ddot{x}\ddot{x}\,dt, \quad \mathrm{L}_1 = \int_0^T x\ddot{x}\,dt, \quad \mathrm{L}_3 = \int_0^T x^3\ddot{x}\,dt, \quad \mathrm{L}_p = \int_0^T p\,\ddot{x}\,dt\,. \tag{9}$$

Uzyskane równania (5) i (8) są algebraicznymi równaniami o nieznanych stałych k_1, k_3 oraz m, c_1, c_3. Mogą być one wykorzystane do wyznaczenia tych stałych, jeśli wartości

zmiennych L_1, L_3, L_p oraz $\mathrm{L}_m, \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_3, \mathrm{L}_p$ są wyznaczone w wyniku eksperymentu bądź obserwacji w przypadku różnych wymuszeń okresowych $p(t)$.

3. OPIS METODY

Przedstawioną w punkcie 2 ideę postępowania można uogólnić na funkcje tłumienia $F_t(\dot{x})$ i sprężystości $F_s(x)$ dowolnej postaci. Przyjmijmy więc postacie ogólne charakterystyk sprężysto - tłumiących następująco:

$$F_t(\dot{x}) = h\, Sgn\, \dot{x} + \sum_{\nu=1}^{n'} k_\nu\, \dot{x}^\nu\,, \quad F_s(x) = \sum_{\nu=1}^{n''} c_\nu\, x^\nu\,, \tag{10}$$

gdzie stała h określa wartość tzw. tarcia suchego, zaś n', n'' - dowolnie duże liczby naturalne. Dla funkcji postaci (10) równanie różniczkowe ruchu modelu przyjmie postać:

$$m\ddot{x} + h\, Sgn\, \dot{x} + \sum_{\nu=1}^{n'} k_\nu\, \dot{x}^\nu + \sum_{\nu=1}^{n''} c_\nu\, x^\nu = p(t)\,. \tag{11}$$

W przypadku układu (11) podejście opisane w punkcie 2 daje dwa następujące równania:

$$h\, L_0 + \sum_{\nu=1}^{n'} k_\nu\, L_\nu \;=\; L_p\,, \tag{12}$$

$$m\, \mathrm{L}_m + \sum_{\nu=1}^{n''} c_\nu\, \mathrm{L}_\nu \;=\; \mathrm{L}_p, \tag{13}$$

gdzie zmienne $L_0, L_\nu, \mathrm{L}_\nu$ oznaczają:

$$L_0 = \int_0^T Sgn\, \dot{x}\, \dot{x}\, dt\,, \quad L_\nu = \int_0^T \dot{x}^\nu\, \dot{x}\, dt\,, \quad \mathrm{L}_\nu = \int_0^T \dot{x}^\nu\, \ddot{x}\, dt\,, \tag{14}$$

zaś $L_p, \mathrm{L}_p, \mathrm{L}_m$ są określone przez wzory (6) i (9).

Zauważmy, że równania (12) i (13) są rozseparowanymi równaniami algebraicznymi i z tego względu wygodnymi do oszacowania mierzonych stałych h, k_ν oraz m, c_ν, (dla $\nu = 1, 2, \ldots, n'$ lub n'') w przypadku, gdy wartości odpowiednich zmiennych L i L są dane z pomiaru. Prosty sposób pomiaru wielkości L i L można przeprowadzić zauważając, że

wartości całek postaci (6), (9) i (14) dla dowolnych drgań okresowych są równe polom ograniczonym przez odpowiednie krzywe zamknięte (pętle) następujących zależności:

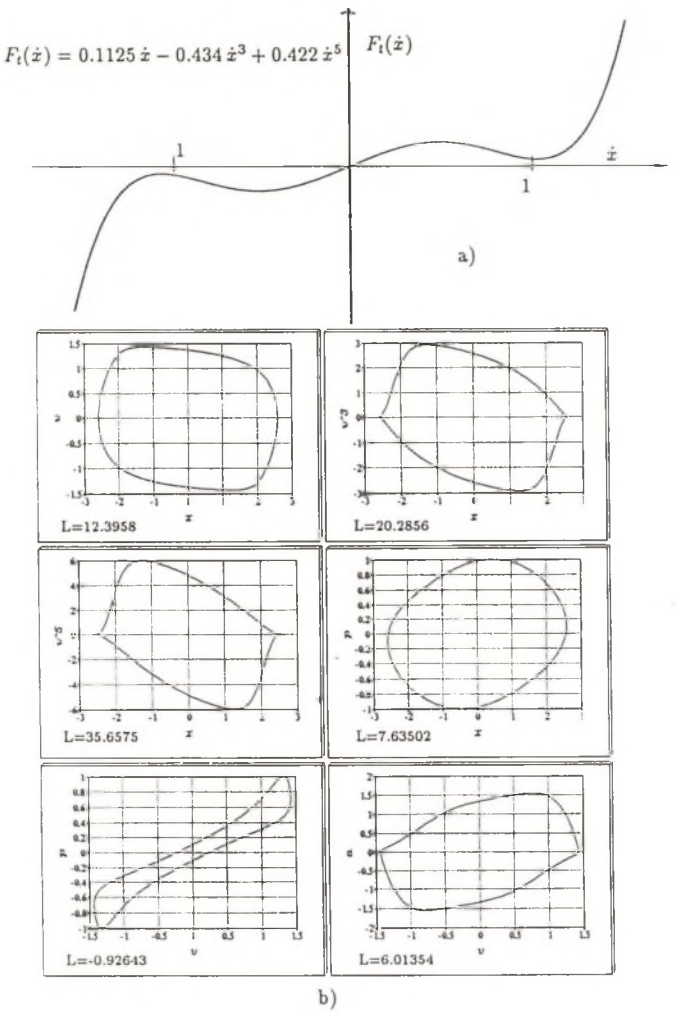
$$
\begin{aligned}
&\text{dla} \quad L_\nu = \int_0^T \dot{x}^\nu \, \dot{x} \, dt = \int_{x(0)}^{x(T)} \dot{x}^\nu \, dx \quad \Longrightarrow \quad \dot{x}^\nu(x), \\
&\text{dla} \quad \mathrm{L}_\nu = \int_0^T x^\nu \, \ddot{x} \, dt = \int_{\dot{x}(0)}^{\dot{x}(T)} x^\nu \, d\dot{x} \quad \Longrightarrow \quad x^\nu(\dot{x}), \\
&\text{dla} \quad L_p = \int_0^T p \, \dot{x} \, dt = \int_{x(0)}^{x(T)} p \, dx \quad \Longrightarrow \quad p(x), \\
&\text{dla} \quad \mathrm{L}_p = \int_0^T p \, \ddot{x} \, dt = \int_{\dot{x}(0)}^{\dot{x}(T)} p \, d\dot{x} \quad \Longrightarrow \quad p(\dot{x}), \\
&\text{dla} \quad \mathrm{L}_m = \int_0^T \ddot{x} \, \ddot{x} \, dt = \int_{\dot{x}(0)}^{\dot{x}(T)} \ddot{x} \, d\dot{x} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x}(\dot{x}), \\
&\text{dla} \quad L_0 = \int_0^T (Sgn\, \dot{x}) \, \dot{x} \, dt = \int_{x(0)}^{x(T)} (Sgn\, \dot{x}) \, dx \quad \Longrightarrow \quad Sgn\, \dot{x}(x),
\end{aligned}
\tag{15}
$$

gdzie $Sgn\, \dot{x}(x)$ oznacza zależność zmiennej $(Sgn\, \dot{x})$ od zmiennej x. Przykłady zależności (15) dla pewnego układu o nieliniowej charakterystyce tłumienia przedstawia rys. 3. Badania wykonano metodą symulacyjną za pomocą programu TUTSIN [4] na komputerze IBM PC, stosując wymuszenia harmoniczne. Wartości całek (odpowiednich pól pętli) obliczono korzystając z własnego oprogramowania [10]. Wyznaczone eksperymentalnie wartości $\hat{L}_0, \hat{L}_\nu, \hat{L}_p$ oraz $\hat{\mathrm{L}}_m, \hat{\mathrm{L}}_\nu, \hat{\mathrm{L}}_p$ dla różnych wymuszeń okresowych (np. różne wartości częstości wymuszenia bądź różne rodzaje wymuszeń) tworzą pewne dwie macierze obserwacji o postaci następującej:

$$
\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \hat{L}_0^I & \hat{L}_1^I & \dots & \hat{L}_{n'}^I & \hat{L}_p^I \\ \hat{L}_0^{II} & \hat{L}_1^{II} & \dots & \hat{L}_{n'}^{II} & \hat{L}_p^{II} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{L}_0^{\mathcal{N}} & \hat{L}_1^{\mathcal{N}} & \dots & \hat{L}_{n'}^{\mathcal{N}} & \hat{L}_p^{\mathcal{N}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \hat{\mathrm{L}}_0^I & \hat{\mathrm{L}}_1^I & \dots & \hat{\mathrm{L}}_{n'}^I & \hat{\mathrm{L}}_p^I \\ \hat{\mathrm{L}}_0^{II} & \hat{\mathrm{L}}_1^{II} & \dots & \hat{\mathrm{L}}_{n'}^{II} & \hat{\mathrm{L}}_p^{II} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{\mathrm{L}}_0^{\mathcal{N}} & \hat{\mathrm{L}}_1^{\mathcal{N}} & \dots & \hat{\mathrm{L}}_{n'}^{\mathcal{N}} & \hat{\mathrm{L}}_p^{\mathcal{N}} \end{bmatrix}, \tag{16}
$$

gdzie przez $\mathcal{N}$ oznaczono liczbę eksperymentów równą liczbie zadawanych wymuszeń. Optymalne wartości parametrów $h, k_\nu, (\nu = 1, 2, \dots, n')$ dla danych macierzy $\mathbf{A}_1$ (oraz wartości parametrów m, c_ν dla danych macierzy $\mathbf{A}_2$) można uzyskać np. stosując znany algorytm najmniejszej sumy kwadratów błędów osobno dla równania (12) i osobno dla równania (13). Algorytm ten stanowi podstawę wielowymiarowej analizy regresji (por. np. [5,6]), której zastosowanie w tym przypadku umożliwia także odpowiednią redukcję zmiennych w równaniu (12) i (13) a w ślad za tym odpowiednie uproszczenie modelu wyjściowego (11).

Kończąc zauważmy, że przedstawiona metoda jest dużo wygodniejsza niż prezentowana np. w pracach [7,8]. Nie wymaga ona bowiem stosowania wymuszeń dodatkowych generujących drgania harmoniczne w układach nieliniowych [9], a ponadto jest dobra dla wymuszenia okresowego dowolnej postaci, co zwiększa jej uniwersalność zastosowań.



Rys. 3. Przykładowe wartości całek b) dla funkcji tłumienia a) przy okresie wymuszenia $T = 10.0$ *sek*

Fig. 3. Exemplary values of integrals b) for a damping function a) at a period of facing T=10.0 sec

LITERATURA

[1] Kulisiewicz K., Piesiak St., A Modelling Procedure of the Simple Mechanical Dynamic Systems with Using a Nonlinear Model, Computational System Analysis 1992, A. Sydow (Editor), Elsevier Sc. Pub. B. V., 1992, pp. 501 – 505.

[2] Kulisiewicz K., Piesiak St., Zastosowanie równania energii do identyfikacji układu zdegenerowanego z tarciem suchym, Konferencja Naukowa, Metody Doświadczalne w Budowie i Eksploatacji Maszyn Roboczych ....., Szklarska Poręba, 1993.

[3] Kulisiewicz M., An Experimental Technique of Testing the Parallel Spring – Damper Configuration of the Dynamic Mechanical System with a Single Degree of Freedom. Modelling, Simulation, Control, B, AMSE Press, Vol 11, No 1, 1987, pp. 15 – 28.

[4] Continuous Dynamic Systems Simulation for Microcomputer, Version 7 Tutsin for IBM'S PC.

[5] Mańczak, K., Metody identyfikacji wielowymiarowych obiektów sterowania.WNT. Warszawa 1971.

[6] Johnston I.,J., Econometric Methods, Mc Graw – Hill Book Comp. Inc. N.Y. 1968.

[7] M. Kulisiewicz, A Nonparametric Method of Identification of Vibration Damping in Non – Linear Dynamic Systems, Int. Journal Solids and Structures, Vol 19, No 7. 1983, pp. 601 – 609.

[8] Kulisiewicz M., Identification Method for the Dynamic Properties of the Mechanical Structures on the Basis of the Duffing Non – Symetrical Model, Nonlinear Vibration Problems, No 20 Polish Ac. of Sc.,1981, pp.203 – 245.

[9] Kulisiewicz M., Saladra W., CAMAC – SM4 Computer System in Exciting Harmonic Vibration in Non – Linear Dynamic Systems, Systems Analysis – Modelling – Simulation 5, 1988, pp. 81 – 84

[10] Kuśmierczyk D., Komputerowa identyfikacja dynamicznych układów nieliniowych z wykorzystaniem równania bilansu energii. Praca dyplomowa, Inst. Mater. i Mech. Tech. Pol. Wrocławska 1993.

Recenzent: Prof. dr hab. inż Eugeniusz Świtoński

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1993 r.

Abstract

A continuation of some new concepts useful in identification of the dynamic properties of the damping – elastic machine elements (i.e: elastic machine suspension) is presented. In the method suggested a basic model with complex configuration of nonlinear elements is *a prori* assumed. Next, by means of a proper experiment a reduction of the model is made possible. In this step a balance energy equation for arbitrary periodic excitation can be applied. The paper describes a case when the physical model has a parallel configuration (internal force $F(x, \dot{x})$ is split into spring force and damping force). The method is useful not only for machine vibration area but also in testing of material properties and their modification. Some results of computer simulation experiment of the concept ar shown too.