ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994

Seria: MECHANIKA z. 115 Nr kol. 1230

Jerzy MARYNIAK, Ziad AL-YOUSEF, Jimoh PEDRO
Instytut Lotnictwa Warszawa
Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej
Politechnika Warszawska

# MODELOWANIE LOTU PRZESTRZENNEGO RAKIETY STEROWANEJ AUTOMATYCZNIE,NAPROWADZANEJ NA CEL RUCHOMY METODĄ TRÓJPUNKTOWĄ

Streszczenie W pracy przedstawiono modelowanie fizyczne i matematyczne lotu przestrzennego rakiety sterowanej automatycznie naprowadzanej na cel ruchomy metodą trójpunktową. Opracowano dynamiczne równania ruchu rakiety, związki kinematyczne naprowadzania, kinematyczne związki celu oraz prawa sterowania w kanałach: pochylenia i odchylenia.

# MODELLING OF SPATIAL MOTION OF AN AUTOMATICALLY CONTROLLED MISSILE GUIDED TO A MOVING TARGET WITH THE AID THREE-POINT METHOD

Summary The physical and mathematical modelling of spatial motion of an automatically controlled missile guided to a moving target with the aid of three-point method is presented in the paper. The dynamic equation of missile motion, kinematic relations of: guidance, target, as well as the control laws in pitch and yaw channels are developed.

# MODELIERUNG DAS RAUMPFLUGES EINER AUTOMATISCH GESTEUERTEN RAKETE, DIE AUF DAS BEWEGLICHE ZIEL UNTER VERVENDUNG DER DREIPUNKTMETHODE GELENKT WIRD

Zusammenfassung. In der Arbeit hat man physikalische und mathematische modellierung des Raumpfluges einer automatisch gesteuerten Rakete, die auf das beweglihe Ziel unter Vervendung der Dreipunktmethode gelenkt wird, dargestellt. Dynamische Gleihungen der Raketenbewegung,kinematische Beriehungen der Lenkung, kinematische Beriehungen das Ziels sowie das Steuergesetzes in der Neigungs und Gierungskanalen wurden bearbeitet.

## 1. WSTĘP

Celem pracy jest modelowanie fizyczne i matematyczne lotu przestrzennego rakiety sterowanej automatycznie,naprowadzanej na cel ruchomy metodą trójpunktową. Technika trójpunktowej metody naprowadzania rakiety polega na tym, że cel ruchomy, rakieta i punkt naprowadzania muszą się znajdować na jednej linii. To jednocześnie nakłada pewne warunki na ruch rakiety podczas naprowadzania wiązką prowadzącą (rys.1).

## 2. MODEL FIZYCZNY I MATEMATYCZNY

W celu wyprowadzania równania ruchu rakiety przyjęto następujące założenia upraszczające:

- rakieta jest nieodkształcalnym układem mechanicznym o sześciu stopniach swobody, jej masa i środek ciężkości zmienia się podczas analizy.

Wyprowadzono równania ruchu sterowanej rakiety w pracach [2,3,4,5,6], poniżej przedstawiono je w postaci ogólnej.

Ogólne równania dynamiki rakiety sterowanej (rys.1) można przedstawić w postaci macierzowej:

$$MV + KMV = Q + U\delta \,, \tag{1}$$

gdzie: - zmodyfikowana macierz bezwładności

$$\bar{M} = M + M_{\psi} \,, \tag{2}$$

- wektor przyspieszeń

$$\dot{V} = col\ [\ \dot{U},\ \dot{V},\ \dot{W},\ \dot{P},\ \dot{Q},\ \dot{R}\ ] \,, \tag{3}$$

- wektor prędkości

$$V = col\ [\ U,\ V,\ W,\ P,\ Q,\ R\ ] \,, \tag{4}$$

- macierz sił zewnętrznych

$$Q = \begin{bmatrix} F \\ M \end{bmatrix} = col[\ X, Y, Z, L, M, N\ ] \,, \tag{5}$$

przy czym

$$M_{\psi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_{\psi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & S_z & -S_y \\ 0 & m & 0 & -S_z & 0 & S_x \\ 0 & 0 & m & S_y & -S_x & 0 \\ 0 & -S_z & S_y & J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ S_z & 0 & -S_x & -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -S_y & S_x & 0 & -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -R & Q & 0 & 0 & 0 \\ R & 0 & -P & 0 & 0 & 0 \\ -Q & P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -W & V & 0 & -R & Q \\ W & 0 & -U & R & 0 & -P \\ -V & U & 0 & -Q & P & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Z_{\delta H} & 0 & M_{\delta H} & 0 \\ 0 & Y_{\delta v} & 0 & L_{\delta v} & 0 & N_{\delta v} \end{bmatrix}^T \tag{9}$$

- wektor sterowania

$$\delta = col[\ \delta_H,\ \delta_v\ ]\ . \tag{10}$$

W rozpatrywanym zagadnieniu sterowanie odbywa się w dwóch kanałach: pochylania $\Theta$ - przez wychylenie steru wysokości $\delta_H$, odchylania $\Psi$ - przez wychylenie steru kierunku. Wykorzystano sprzężenie pomiędzy ruchem przechylającym i odchylającym w procesie sterowania. Dopuszczono do obrotu rakiety wokół osi podłużnej.

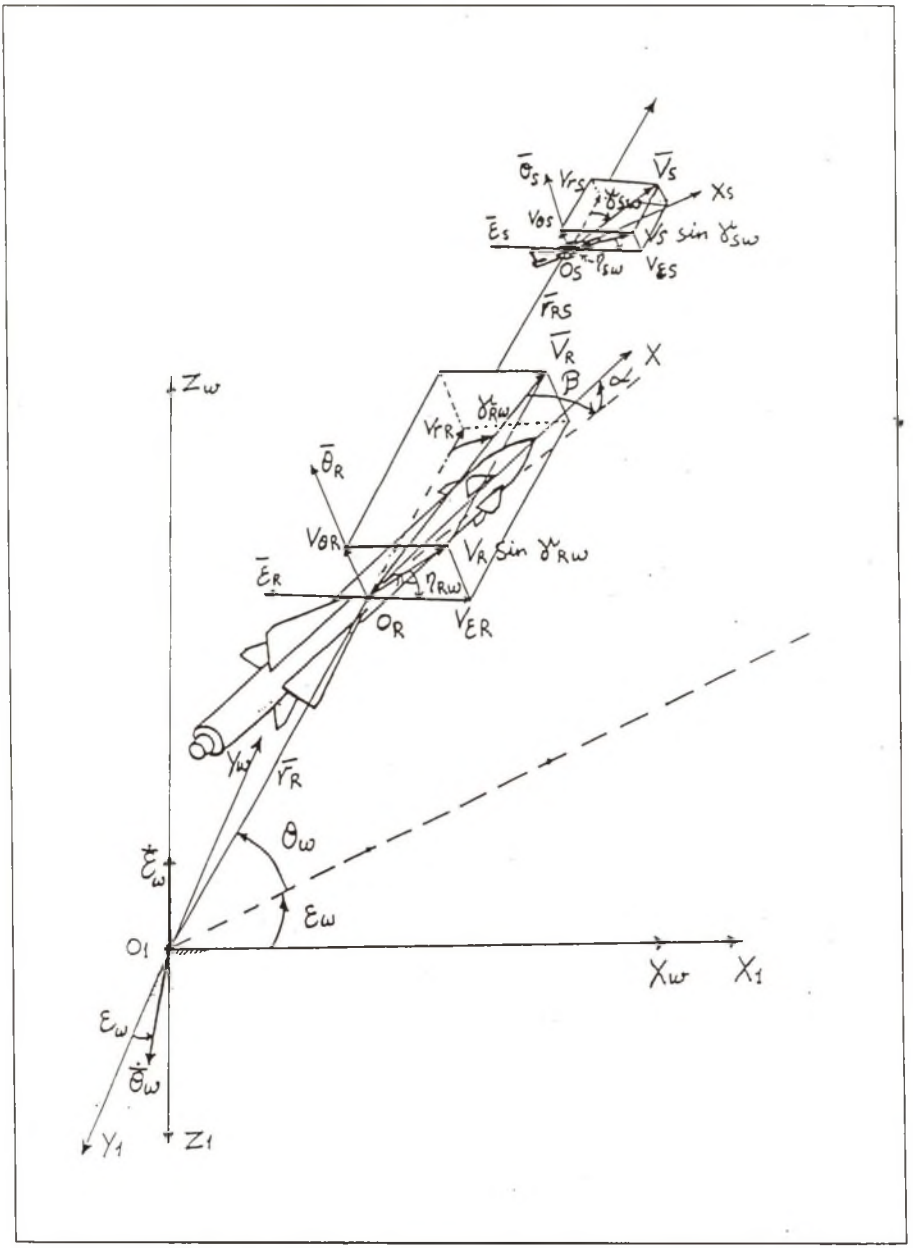
Związki kinematyczne (rys.1):

$$\begin{aligned} \dot{r} &= col\ [\ \dot{x}_1,\ \dot{y}_1,\ \dot{z}_1,\ \dot{\Phi},\ \dot{\Theta},\ \dot{\Psi}] = \\ &= F\ (\ U,\ V,\ W,\ P,\ Q,\ R,\ \Phi,\ \Theta,\ \Psi\ ) \end{aligned} \tag{11}$$

Kinematyka wykonawczego systemu sterowania rakietą:

- kinematyczne równanie sterowania w kanale steru wysokości $\delta_H$:

$$T_1^H\ \dot{\delta}_{dH} + T_o^H\ \delta_{dH} = -\ (\ M_{zo}^H + K_z^{\alpha_H}\ \alpha_H + K_z^{\delta_H}\ \delta_H + b_a^H\ \dot{\delta}_H\ )\ , \tag{12}$$




Rys.1. Przyjęte układy odniesienia.

Fig. 1. Assumed coordinate systems

- kinematyczne równanie sterowania w kanale steru kierunku $\delta_v$:

$$T_1^v \dot{\delta}_{dv} + T_o^v \delta_{dv} = -\left( M_{zo}^v + K_z^{\beta_v} \beta_v + K_z^{\delta_v} \delta_v + b_a^v \delta_v \right) . \tag{13}$$

W celu zmniejszenia liczby współczynników wzmocnienia, które trzeba dobierać do niezbędnego minimum w prawach sterowania [6,7,8], zmodyfikowano prawa sterowania do następującej postaci:
- w kanale pochylania $\Theta$

$$\delta_H = K_z^H (H - H_z) + K_\Theta^H (\Theta - \Theta_z) + K_Q^H (Q - Q_z) + K_w^H (W - W_z) + \delta_{Ho} , \tag{14}$$

- w kanale odchylania $\Psi$

$$\begin{aligned} \delta_v = {} & K_y^v (y_1 - y_{1_z}) + K_V^v (\dot{y}_1 - \dot{y}_{1_z}) + K_\Phi^v (\Phi - \Phi_z) + \\ & + K_p^v (P - P_z) + K_R^v (R - R_z) + K_\Psi^v (\Psi - \Psi_z) + \delta_{vo} . \end{aligned} \tag{15}$$

Prędkość postępowa rakiety

$$V_o^2 = U^2 + V^2 + W^2 . \tag{16}$$

Kąty aerodynamiczne
- kąt natarcia

$$\alpha = \text{arc } tg \frac{W}{U} , \tag{17}$$

- kąt ślizgu

$$\beta = \text{arc } \sin \frac{V}{V_o} . \tag{18}$$

Wysokość lotu rakiety

$$H_R = -z_1 . \tag{19}$$

Gęstość powietrza dla H < 11000 m

$$\rho = \rho_o \left[ 1 + \frac{z_1}{44300} \right]^{4.256} . \tag{20}$$

Równania kinematyczne celu

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1_S} &= V_S \cos \Theta_S \cos \Psi_S , \\ \dot{y}_{1_S} &= V_S \cos \Theta_S \sin \Psi_S , \\ \dot{z}_{1_S} &= - V_S \sin \Theta_S . \end{aligned} \tag{21}$$

Równania położenia wiązki poruszającej się z samolotem:

$$\Theta_w = \frac{V_S}{r_S} \sin \gamma_{Sw} \sin \eta_{Sw}$$
$$\dot{\epsilon}_w = \frac{V_S}{r_S} \sin \gamma_{Sw} \cos \eta_{Sw} \frac{1}{\cos \Theta_w} \tag{22}$$

gdzie:

$\gamma_{Sw}$ - kąt miedzy wektorem prędkości samolotu a linią łączącą rakietę z celem,

$\eta_{Sw}$ - kąt między rzutem wektora prędkości samolotu na płaszczyznę pionową do linii łączącej a osią tej płaszczyzny.

$$\sin \gamma_{Rw} = \frac{r_R}{V_R} \frac{V_S}{r_S} \sin \gamma_{Sw}$$
$$tg\, \eta_{Rw} = tg\, \eta_{Sw} \quad . \tag{23}$$

Prędkość zbliżania się rakiety do samolotu:

$$V_{RS} = V_S \cos\gamma_{Sw} - V_R \cos\gamma_{Rw} \quad . \tag{24}$$

W pracy [1] wyprowadzono zależność pomiędzy $\gamma_w$, $\eta_w$.

Parametry zadane w prawach sterowania (14)-(15) są wyprowadzone [1] z kinematyki wiązki, której ruch kulisty zależny jest od manewrów celu (rys.1). Przykładowo przytoczone są tu zadane współrzędne liniowe rakiety:

$$x_{1R_z} = r_R \cos\Theta_w \cos\epsilon_w$$
$$y_{1R_z} = -r_R \cos\Theta_w \sin\epsilon_w \tag{25}$$
$$z_{1R_z} = -r_R \sin\Theta_w$$

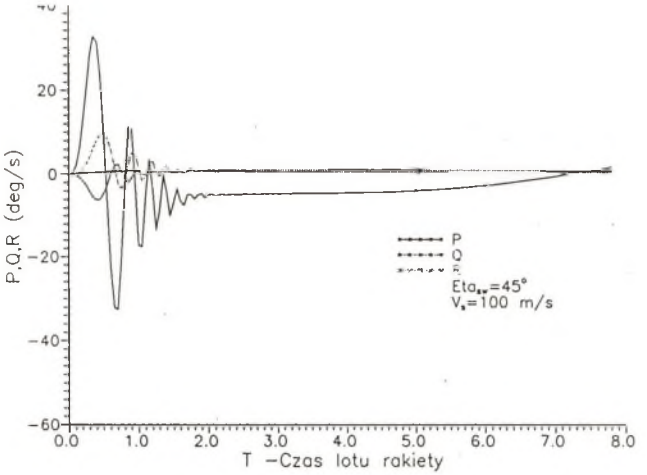
Przy doborze współczynników wzmocnienia korzystano z całkowego, kwadratowego kryterium jakości sterowania oraz uzupełniono je oceną procesów przejściowych:

$$J_i = \int_0^{t_k} \left[ \left[ \frac{Y_i - Y_z}{Y_{i_{max}}} \right]^2 + \left[ \frac{\delta_i}{\delta_{i_{max}}} \right]^2 \right] dt \quad . \tag{26}$$

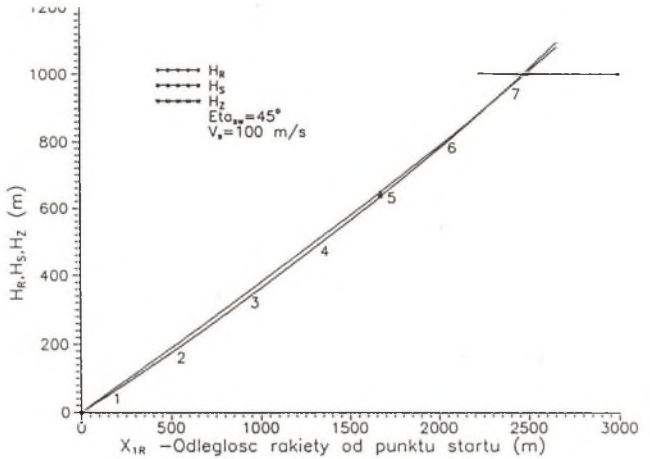
Znormalizowano wzkaźnik jakości (26), ponieważ rząd wielkości zmiennych stanu jest rózny, natomiast drugi składnik uwzględnia koszt sterowania.

## 3. ANALIZA NUMERYCZNA I WNIOSKI

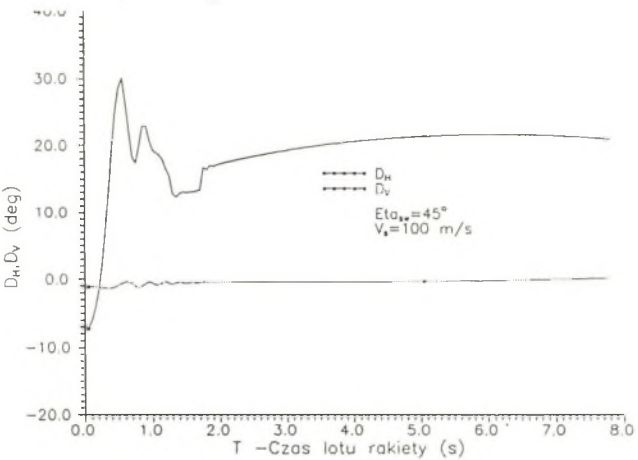
Po odpowiedniej identyfikacji parametrycznej: masowej, geometrycznej i aerodynamicznej, stosując model matematyczny (1) - (26) przeprowadzono symulację numeryczną naprowadzania rakiety ziemia - powietrze klasy "ROLAND" na lecący



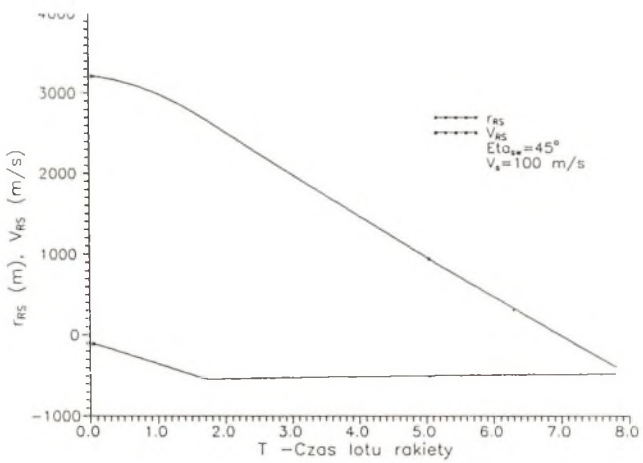

Rys. 2. Przebiegi zmian prędkości kątowej P, Q, R w czasie
Fig. 2. Time histoty of angulas speed P, Q, R



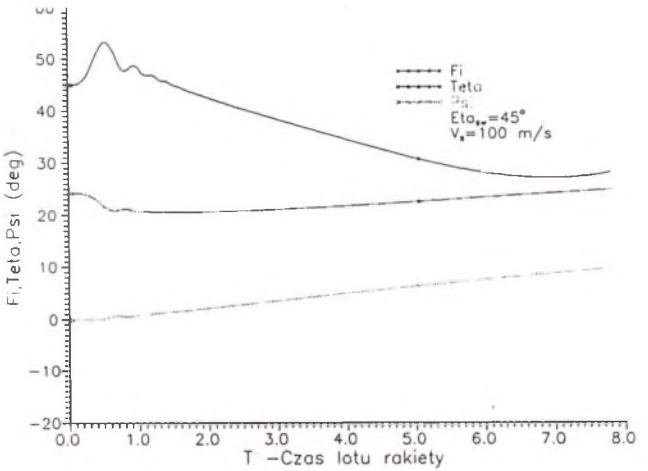

Rys. 3. Wysokości lotu rakiety i samolotu w funkcji odległości od startu
Fig. 3. Altitude of missile and target versus distance from the start



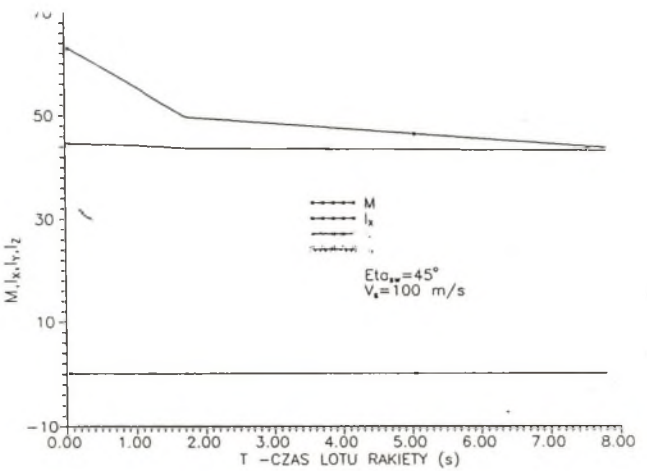

Rys. 4. Kąty wychylenia sterów: wysokości i kierunku w czasie
Fig. 4. Angles of deflection of elevator and fin versus time




Rys. 5. Przebiegi zmian $r_{RS}$ i prędkości zbliżania $V_{RS}$ w czasie
Fig. 5. Curves of $r_{RS}$ and relative speed $V_{RS}$ versus time




Rys. 6. Kąty przechylania, pochylania i odchylania w czasie
Fig. 6. Time history of bank, pitch and yaw angles




Rys. 7. Masa i momenty bezwładności rakiety w czasie
Fig. 7. Time history of missile mass and moment of inertia

samolot. Wyniki obliczeń są przedstawione na rys. 2 - 7 i pokazują skuteczność tego sposobu sterowania rakietą przy trójpunktowej metodzie naprowadzania.

Na podstawie przeprowadzonej symulacji numerycznej wynika, że proces sterowania rakietą w chwili początkowej jest bardzo nieustalony (rys.4), świadczy o tym duże wychylenia steru wysokości. To potwierdza, dlaczego większość badaczy z dziedziny sterowania rakietą unika tego etapu procesu, gdyż rakieta musi wtedy latać kolejno w zakresie poddźwiękowym - transonicznym - naddźwiękowym. Na przedstawionych wykresach widoczne jest utrzymywanie przez rakietę parametrów zadanych ruchem wiązki oraz osiągnięcie celu.

## LITERATURA

[1] Al-Yousef Z.: *Modelowanie i analiza lotu rakiety sterowanej klasy ziemia - powietrze naprowadzanej wiązką.* Rozprawa doktorska, promotor J. Maryniak, ITLiMS Wydz. MEiL, Politechnika Warszawska 1993 (nie publikowana).

[2] Maryniak J.: *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej. Mechanika Nr 35. Warszawa 1975.

[3] Maryniak J.: *Modelowanie fizyczne i matematyczne w dynamice obiektów ruchomych.* Referat plenarny. Zbiór referatów XXVI Sympozjon "Modelowanie w Mechanice" Gliwice- Kudowa 1987.

[4] Maryniak J.: *Prawa sterowania jako więzy nieholomiczne automatycznego sterowania śmigłowcem.* MTiS XXV Z.1-2. PWN, Warszawa 1987.

[5] Maryniak J.: *Modelowanie i symulacja w nawigacji i sterowaniu obiektów ruchomych.* Referat plenarny II Krajowa Konferencja Automatyzacja Nawigacji i Systemów Sterowania. Gdynia 1989.

[6] Maryniak J.: *Modelowanie matematyczne automatycznie sterowanych obiektów ruchomych.* Materiały III Krajowej Konferencji Automatyzacja Nawigacji i Systemów Sterowania. Gdynia 1991.

Recenzent: Dr hab. inż. Andrzej Buchacz

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1993 r.

**Abstract**

The physical and mathematical modelling of an automatically controlled missile guided to a moving target with the aid of three-point method is presented in the paper. The full equations of motion for the missile, kinematic relations of guidance, kinematic equations of the target, as well as the control laws with the given parameters relative to the motion of the tracking beam were developed. The system of equations was solved with the aid of Runge-Kutta-Verner differential equation procedure.

The obtained results confirmed the effectiveness of the proposed control method and showed that throughout the process the deviation from the tracking beam was minimised.