ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994

Seria: MECHANIKA z. 115 Nr kol.1230

Wiesław OSTACHOWICZ
Instytut Maszyn Przepływowych, Gdańsk
Polska Akademia Nauk w Gdańsku
Jacek JACKIEWICZ
Wydział Mechaniczny,
Akademia Techniczno-Rolnicza, Bydgoszcz

MODELOWANIE SPRĘŻYSTYCHTYCH PÓL NAPRĘŻEŃ I ODKSZTAŁCEŃ PRZED WIERZCHOŁKIEM PĘKNIĘCIA ELEMENTAMI BRZEGOWYMI

Streszczenie. W pracy przedstawiono zasady modelowania sprężystych pól naprężeń i odkształceń przed wierzchołkiem pęknięcia. Modelowanie oparte jest na metodzie elementów brzegowych w połączeniu z metodą równań całkowych dla sił wypadkowych i gęstości dyslokacji. Rozważania teoretyczne zostały zilustrowane przykładami obliczeniowymi.

MODELLING OF STRESS AND DISPLACEMENT FIELDS AHEAD OF THE CRACK BY THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

Summary. Principles of modelling of stress and displace-ment fields around the crack tip is presented in this paper. Modelling is based on the integral equation representation of resultant forces and dislocation densities, coupled to the direct boundary element method. Numerical examples illustrate the theoretical considerations.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОКОЛО ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ МЕТОДОМ КРАЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Резюме. В работе представлено принципы моделирования полей напряжений и перемещений вблизи вершины трещины. Конкретные примеры иллюстрируют полученные результаты при помощи интегральных уравнений для равнодействующых сил в связи с методом краевых элементов.

1. WSTĘP

Stany naprężenia i odkształcenia w bliskim sąsiedztwie wierzchołka pęknięcia, które jest umieszczone w liniowo sprężystym ciele stałym,poddanym działaniu złożonego obciążenia zewnętrznego, mogą być scharakteryzowane za pomocą trzech współczynników intensywności naprężeń: k_1, k_2, k_3 [2].

Jeżeli zostaną pominięte nieosobliwe wyrażenia funkcji naprężeń w okolicy wierzchołka pęknięcia,to spełniona jest następująca zależność:

$$\sigma_x+\sigma_y=\sqrt{\frac{2}{r}}\left(k_1\cos\frac{\theta}{2}-k_2\sin\frac{\theta}{2}\right). \tag{1}$$

Powyższe równanie może być wyrażone przez część rzeczywistą funkcji zespolonej

$$\sigma_x+\sigma_y=\Re\left[\frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{z-z^*}}\right], \tag{2}$$

gdzie : $k = k_1-ik_2$,

$z = x+iy = z^*+re^{i\theta}$,

z^* - współrzędna zespolona wierzchołka pęknięcia.

Po porównaniu zależności (2) z wyrażeniami funkcji naprężeń Muskhelishviliego [5]

$$\begin{aligned}&\sigma_x+\sigma_y=4\Re[\Phi'(z)],\\&\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar{z}\Phi''(z)+\Psi'(z)],\end{aligned} \tag{3}$$

gdzie : $\Phi(z)$ i $\Psi(z)$ - potencjały zespolone.

Zespolony współczynnik intensywności naprężeń może być wyrażony w następujący sposób:

$$k=2\sqrt{2}\lim_{z\to z^*}\sqrt{z-z^*}\,\Phi'(z). \tag{4}$$

W celu określenia pól naprężeń i odkształceń w dwuwymiarowym ciele stałym do równania (4) podstawiono zależność definiującą potencjał zespolony $\Phi'(z)$ [3] względem gęstości dyslokacji. W wyniku uzyskano następujące zależności definiujące współczynniki intensywności naprężeń dla osobliwych elementów liniowych:

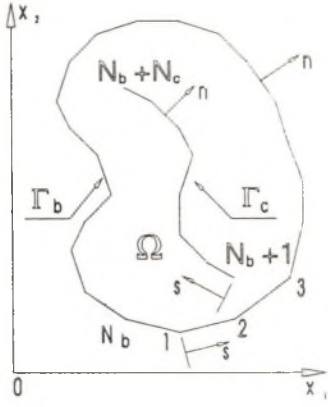
$$K_I = \frac{-2\mu}{(\kappa+1)}\sqrt{2\pi d}\,[G_1^* \sin\gamma - G_2^* \cos\gamma],$$
$$K_{II} = \frac{2\mu}{(\kappa+1)}\sqrt{2\pi d}\,[G_1^* \cos\gamma + G_2^* \sin\gamma], \qquad (5)$$

gdzie : d - długość osobliwego elementu liniowego zawierającego wierzchołek pęknięcia,
G_1^*, G_2^* - gęstości dyslokacji w punkcie węzłowym wierzchołka pęknięcia,
μ, κ - stałe sprężyste, a $\pi k_1^2 = K_I^2$, $\pi k_2^2 = K_{II}^2$.

Gęstości dyslokacji w punktach węzłowych wierzchołków pęknięć w przytoczonych przykładach obliczeniowych zostały wyznaczone za pomocą metody elementów brzegowych oraz równań całkowych dla sił wypadkowych i gęstości dyslokacji wzdłuż linii pęknięcia.

2. WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKÓW INTENSYWNOŚCI NAPRĘŻEŃ METODĄ ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

Na rys. 1 przedstawiono dwuwymiarowy obszar domknięty Ω ograniczony zewnętrzną linią brzegową $\Gamma_b = \Gamma_{b1} + \Gamma_{b2}$ i wewnętrzną linią pęknięcia $\Gamma_c = \Gamma_{c1} + \Gamma_{c2}$. Obszar ten jest obciążony zadanymi siłami powierzchniowymi τ_j wzdłuż brzegu $\Gamma_{b1} + \Gamma_{c1}$ oraz zadanymi przemieszczeniami u_j wzdłuż brzegu $\Gamma_{b2} + \Gamma_{c2}$. Dla domkniętego obszaru Ω brzegowe równanie całkowe sformułowane w sposób bezpośredni przy uwzględnieniu notacji Cruse'a [1] przyjmuje następującą postać:



Rys. 1. Dwuwymiarowy obszar zawierający pęknięcie
Fig. 1. Plane region containing a crack

$$C_{ij}(P)\,u_j(P) + \oint_{\Gamma_b+\Gamma_c} T_{ij}(P,Q)\,u_j(Q)\,d\Gamma = \oint_{\Gamma_b+\Gamma_c} U_{ij}(P,Q)\,t_j(Q)\,d\Gamma, \qquad (6)$$

gdzie :
$C_{ij}(P)$ - współczynniki zależące od lokalnego kształtu brzegu $d\Gamma$ w punkcie $P \in \Gamma_b + \Gamma_c$,
$T_{ij}(P,Q)$ i $U_{ij}(P,Q)$ - podcałkowe funkcje wpływu.

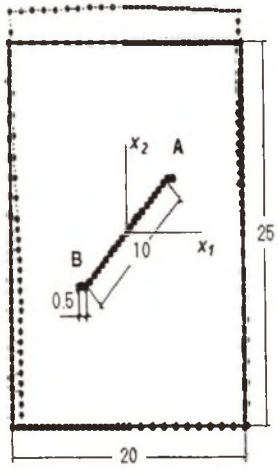
Równanie całkowe (6) rozwiązuje się numerycznie za pomocą elementów brzegowych. Bezpośrednie zastosowanie metody elementów brzegowych do modelowania pól naprężeń i odkształceń przed wierzchołkiem pęknięcia nie daje w pełni pozytywnych rezultatów. Geometryczne pokrywanie się górnej i dolnej linii pęknięcia ($\Gamma^+_c, \Gamma^-_c \to \Gamma_c$) często prowadzi do układu równań, którego nie można rozwiązać. Nierozwiązalnego układu równań można uniknąć, wykorzystując metodę elementów brzegowych w połączeniu z metodą równań całkowych dla sił wypadkowych $F_i^-(P)$ i gęstości dyslokacji, określonych wzdłuż dolnej linii pęknięcia Γ_c^-. Całkowym sformułowaniem tej metody jest następujący układ równań:

$$
\begin{aligned}
P\in\Gamma_b \to C_{ij}u_j &= \oint_{\Gamma_b} U_{ij}\tau_j d\Gamma - \oint_{\Gamma_b} T_{ij}u_j d\Gamma + \int_{\Gamma_c^-} W_{ij}\frac{\partial}{\partial s^-}[\Delta u_j^c]\, ds^-, \\
P\in\Gamma_c^- \to F_i^- &= \oint_{\Gamma_b} F_{ij}^{\tau}\tau_j d\Gamma - \oint_{\Gamma_b} F_{ij}^{u}u_j d\Gamma + \int_{\Gamma_c^-} F_{ij}^{d}\frac{\partial}{\partial s^-}[\Delta u_j^c]\, ds^- + C_i,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

gdzie : W_{ij}, F_{ij}^{τ}, F_{ij}^{u}, F_{ij}^{d} - podcałkowe funkcje wpływu,
C_i - stałe całkowania,
a jej szczegółowy opis został przedstawiony w pracach [3,6].

3. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

3.1. Przykład pierwszy



Rys. 2. Prostokątna tarcza z pęknięciem w kształcie litery Z
Fig. 2. Rectangular plate containing the Z-shaped crack

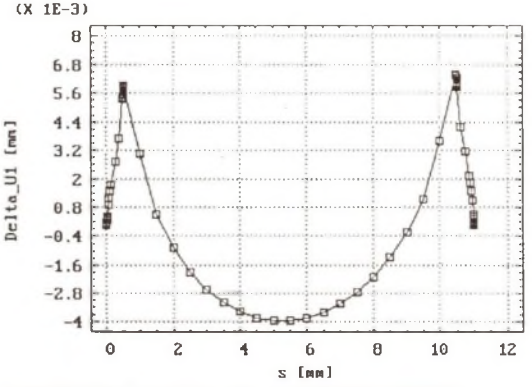
Na rys. 2 przedstawiono prostokątną tarczę z pęknięciem w kształcie litery Z, której górny brzeg jest obciążony jednorodnym, jednostkowym obciążeniem powierzchniowym $p_0=1$. Dolny brzeg tej tarczy jest utwierdzony z możliwością swobodnego przemieszczania się w kierunku osi x_1. Na rys. 2 przemieszczony brzeg zewnętrzny tarczy oznaczono cienką linią, przy czym wartości przemiesz-czeń powiększono 15 razy. Linia pęknięcia została podzielona na 76 elementów liniowych, a zewnętrzny brzeg tarczy na 120 liniowych elementów brzegowych. Na rys. 3 i 4 przedstawiono odpowiednio przemieszczenia względne w kierunku osi x_1 i x_2, określone wzdłuż lokalnej współrzędnej s dolnej linii pęknięcia. Przemieszczenia te zostały wyznaczone dla

$E/p_0=205$ i $\nu=0.3$. Uzyskane wartości współczynników intensywności naprężeń w wierzchołkach A i B pęknięcia w kształcie litery Z (tablica 1) porównano z wynikami obliczeń numerycznych zamieszczonymi w pracach [4,7].

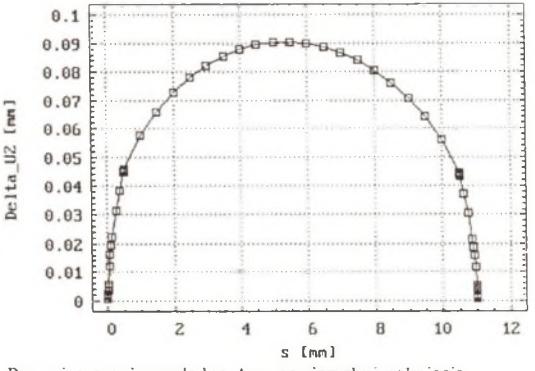
Tablica 1

Wartości współczynników intensywności naprężeń w wierzchołkach pęknięcia w kształcie litery Z

	K_{IA}	K_{IIA}	K_{IB}	K_{IIB}
BEM + RF	4.53	0.32	4.42	0.40
Lit. [4]	4.52	0.32	4.41	0.36
Lit. [7]	4.50	0.33	4.40	0.41



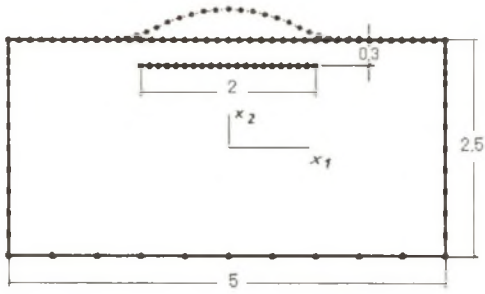
Rys. 3. Przemieszczenia względne Δu_1 powierzchni pęknięcia
Fig. 3. Relative crack surface displacements Δu_1



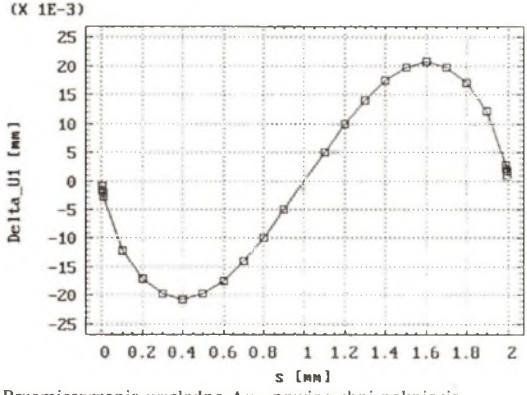
Rys. 4. Przemieszczenia względne Δu_2 powierzchni pęknięcia
Fig. 4. Relative crack surface displacements Δu_2

3.2. Przykład drugi

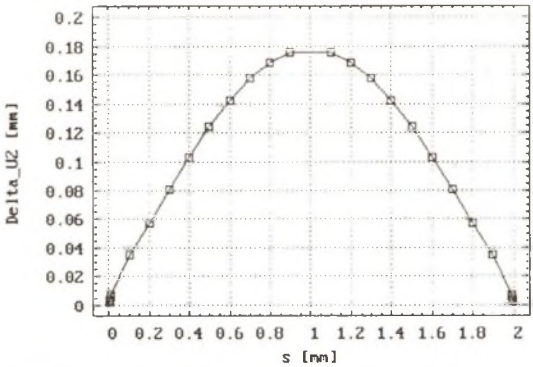
Na rys. 5 przedstawiono prostokątną tarczę zawierającą pęknięcie w pobliżu jej górnego brzegu, którego powierzchnia jest obciążona jednostkowym ciśnieniem $p_0=1$. Na rysunku tym przemieszczony brzeg zewnętrzny tarczy oznaczono cienką linią, przy czym wartości przemieszczeń powiększono 2 razy. Linię pęknięcia zdyskretyzowano za pomocą 28 elementów liniowych. Natomiast zewnętrzny brzeg tarczy podzielono na 74 liniowe elementy brzegowe. Na rys. 6 i 7 przedstawiono odpowiednio przemieszczenia względne w kierunku osi x_1 i x_2, określone wzdłuż lokalnej współrzędnej s dolnej linii pęknięcia. Przemieszczenia te zostały wyznaczone dla $E/p_0=205$ i $\nu=0.3$. Po przyłożeniu obciążenia zewnętrznego p_0 do powierzchni pęknięcia wzdłuż górnej linii brzegowej tarczy w okolicy pęknięcia wystąpiły duże gradienty przemieszczeń.



Rys. 5. Prostokątna tarcza zawierająca pęknięcie w pobliżu jej górnego brzegu
Fig. 5. Plane with the subsurface crack



Rys. 6. Przemieszczenia względne Δu_1 powierzchni pęknięcia
Fig. 6. Relative crack surface displacements Δu_1



Rys. 7. Przemieszczenia względne Δu_2 powierzchni pęknięcia
Fig. 7. Relative crack surface displacements Δu_2

4. WNIOSKI

Przedstawiona w pracy metoda obliczeniowa, będąca połączeniem metody równań całkowych dla sił wypadkowych i gęstości dyslokacji określonych wzdłuż dolnej linii pęknięcia z metodą elementów brzegowych jest efektywnym narzędziem służącym do modelowania pól naprężeń i odkształceń przed wierzchołkiem pęknięcia. Uzyskane rezultaty wskazują na możliwość wykorzystania tej metody do numerycznej symulacji wzrostu pęknięcia zmęczeniowego w dwuwymiarowych izotropowych ośrodkach sprężystych, zachodzącego w obecności zjawiska kontaktu między powierzchniami pęknięcia.

LITERATURA

[1] Cruse T. A.: Two Dimensional BIE Fracture Mechanics Analysis. Applied Mathematical Modeling, Vol. 2, 1978, ss.287-293.

[2] Erdogan F.: Stress Intensity Factors. Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, 1983, ss.992-1002.

[3] Jackiewicz J., Ostachowicz W.: Rozwiązywanie płaskich pęknięć metodą równań całkowych. ZN Pol. Śl., ser. Mechanika, z. 113, Gliwice, 1993, ss.135-140.

[4] Liu N., Altiero N., Sur U.: Kinked Cracks in Finite Plane Bodies. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 84, 1990, ss.211-226.

[5] Muskhelishvili I. N.: Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. P. Noordhoff Ltd., Groningen, Holland, 1953.

[6] Ostachowicz W., Jackiewicz J.: Modelowanie propagacji pęknięć zmęczeniowych elementami brzegowymi. ZN Pol. Śl., ser. Mechanika, z. 107, Gliwice, 1992, ss.311-318.

[7] Zang W. L., Gudmondson P.: A Boundary Integral Method for Internal Piece-Wise Smooth Crack Problems. International Journal of Fracture, Vol. 38, 1988, ss.275-294.

Recenzent: Prof dr hab. inż. Tadeusz Burczyński

Wpłynęło do redakcji w grudniu 1993r.

Abstract

The problem of modelling of stress and displacement fields around the crack tip (modes I and II) was solved by an application of the integral equations for the resultant forces along the crack line, coupled to the direct integral expression for the displacements on the outer boundary. The integral equations (7) utilized in this method were developed for treatment of cracks in plane finite bodies. Linear elements have been employed for all the integrals.

Two of some finite domain examples are presented in this paper. The Z-shaped crack shown in Fig. 2 is situated in the rectangular plate, which is loaded at one end by an uniform tension p_0 and has a sliding support on the opposite end. The outer boundary of the plate was discretized into 120 linear BEM elements. The crack line was discretized into 76 elements. In Figs. 3 and 4 the crack opening displacements Δu_1 and Δu_2 with $E/p_0=205$, $\nu=0.3$ are plotted.

In the second example the sub-surface crack loaded by uniform pressure p_0 on its surface is situated in the rectangular plate, as shown in Fig. 5. The outer boundary of the plate was discretized into 74 linear BEM elements. The crack line was discretized into 28 elements. In Figs. 6 and 7 the crack opening displacements Δu_1 and Δu_2 with $E/p_0=205$, $\nu=0.3$ are plotted.