ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994

Seria: MECHANIKA z. 115 Nr kol. 1230

Józef PIETRUCHA, Maria ZŁOCKA
Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej
Politechnika Warszawska

ANALIZA MOŻLIWOŚCI STABILIZACJI UKŁADU NIELINIOWEGO ZA POMOCĄ STEROWANIA LINIOWEGO

Streszczenie. Rozpatrywane jest zagadnienie stabilizacji analogiczne do zagadnienia stateczności badanego metodą pierwszego przybliżenia Lapunowa. Rozważania o przypadkach niekrytycznych i krytycznych stateczności zilustrowano na przykładzie wirującego pocisku. Przedstawiono podstawowe wnioski wynikające z twierdzenia Galperina - Krasowskiego, które umożliwia podział układów sterowanych na niekrytyczne i krytyczne.

POSSIBILITY ANALYSIS OF STABILIZATION OF NONLINEAR SYSTEM USING A LINEAR CONTROL

Summary. We state the following question: is it possible to stabilize nonlinear system using linear controller ? This problem leads to so called critical cases. To illustrate such situation in practice we consider a flying spinning projectile. The point of this paper is the classification of controlled systems into uncritical and critical.

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТИ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНОГО УПРАВНЕНИЯ

Резюме. Рассматривается задача о стабилизации аналогичная задачи о устойчивости Ляпунова по первому приближению. Рассуждения об некритических и критических случаях устойчивости проиллюстрировано примером вращающегося снаряда. Представлено основные следствия теоремы Гальперина - Н. Красовского.

1. WPROWADZENIE

Za rzecz klasyczną można obecnie uznać, że modyfikację własności dynamicznych statków powietrznych przeprowadza się na podstawie modelu liniowego [1]:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$

z kwadratowym wskaźnikiem jakości:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u)\, dt \tag{2}$$

Liniowość i stacjonarność prawa sterowania:

$$u = Fx \quad , \tag{3}$$

gdzie:

$$F = -R^{-1} B^T K \quad , \tag{4}$$

przy czym:

$$KBR^{-1}B^T K - KA - A^T K - Q = 0 \quad , \tag{5}$$

mają doniosłe znaczenie w praktycznej realizacji układu sterowania stanami lotu statku powietrznego. Gdy bowiem dany jest model matematyczny obiektu w postaci (1) i przyjęte są macierze wagowe we wskaźniku (2), to macierz sprzężenia zwrotnego **F** można wyznaczyć zanim układ sterowania zostanie zbudowany materialnie.

Niestety, jak to często bywa z dobrymi narzędziami, są one nadużywane, tzn. są stosowane w sytuacjach, dla których nie zostały zbudowane (np. regulator liniowy do układu nieliniowego [2]) i to bez analizy zasadności takiego postępowania. Tymczasem każdy sterowany obiekt latający może zachowywać się jak układ nieliniowy, którego model matematyczny ma postać:

$$\dot{z} = f(z,w,t), \qquad J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(z,w,t)\, dt \tag{6}$$

Do tej pory nie ma metody rozwiązania tego zagadnienia w postaci zamkniętej, a nawet rozwiązanie numeryczne nie jest łatwe, w szczególności gdy chce się uwzględnić siły aerodynamiczne, które w przypadku ogólnym są i nieliniowe, i niestacjonarne. Dlatego pożądane jest znalezienie modelu mniej skomplikowanego, ale adekwatnego.

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Ponieważ istnieją różne sposoby wyznaczania macierzy (4), więc w dalszych rozważaniach nie będziemy brali pod uwagę wskaźnika jakości, a tylko samo równanie ruchu. Przy pewnych założeniach nałożonych na funcję f można otrzymać prostszy model w postaci:

$$\dot{z} = Az + Bw + \psi(z,w,t). \tag{7}$$

Po podstawieniu sterowania (3) do równania (7) mamy:

$$\dot{z} = Lz + \psi(z,Fz,t), \qquad gdzie \quad L = A + BF \tag{8}$$

Zachodzi teraz pytanie: czy i kiedy układ sterowany opisany modelem (8) jest asymptotycznie stateczny ? Innymi słowy: czy możliwe jest ustatecznienie układu nieliniowego (8) za pomocą sterowania liniowego ?

3. PRZYPADEK KRYTYCZNY STATECZNOŚCI

Niech równanie ruchu zaburzonego ma postać:

$$\dot{x} = Ax + \phi(x,t), \tag{9}$$

gdzie A jest macierzą stałą, a ϕ w tym obszarze spełnia warunek:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\phi(x,t)}{\|x\|} = 0 \tag{10}$$

$$\dot{x} = Ax \tag{11}$$

Z kryteriów stateczności dla modelu pierwszego przybliżenia wynika, że jeżeli równanie charakterystyczne $\det(A - \lambda E) = 0$ ma część pierwiastków zerowych, a pozostałe z ujemnymi częściami rzeczywistymi, to ruch niezaburzony może być zarówno stateczny, jak i niestateczny. Wówczas pytanie o stateczność układu (9) może być rozstrzygnięte tylko z uwzględnieniem nieliniowości ϕ (x,t).

Tak więc wszystkie przypadki, które mogą się pojawić przy badaniu stateczności układu (9), można podzielić na dwie grupy: 1) przypadki niekrytyczne, dla których o stateczności można wnosić na podstawie pierwszego przybliżenia; 2) przypadki krytyczne, w których trzeba uwzględnić nieliniowość. Z matematycznego punktu widzenia przypadki takie można traktować jako osobliwe. W mechanice lotu mają one jednak duże znaczenie praktyczne. Przykładem może być problem występujący w Balistyce Zewnętrznej z koziołkowaniem pocisku.

Przy przyjęciu standardowego modelu [4] można uzyskać następujące równania ruchu pocisku:

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha}\cos\beta - 2A\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta + Cn\dot{\beta} &= eR\sin\alpha, \\ A\ddot{\beta} + A\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta - Cn\dot{\alpha}\cos\beta &= eR\sin\beta\cos\alpha \ , \end{aligned} \tag{12}$$

gdzie: A, C - równikowy i osiowy moment bezwładności pocisku; n-rzut prędkości kątowej pocisku na jego oś symetrii; e - odległość między środkiem masy i środkiem parcia; R - opór aerodynamiczny; α - kąt natarcia; β - kąt między osią pocisku a płaszczyzną strzału.

Po odrzuceniu wyrazów nieliniowych i zastosowaniu standardowego sposobu badania stateczności otrzymujemy równanie charakterystyczne:

$$A^2\lambda^4 + (C^2n^2 - 2AeR)\lambda^2 + (eR)^2 = 0. \tag{13}$$

Zauważmy, że do równania (13) nie można zastosować kryterium Routhla-Hurwitza. Jeżeli parametry pocisku nie spełniają warunku:

$$4AeR - C^2n^2 > 0 \ , \tag{14}$$

to wszystkie cztery pierwiastki równania (13) mają zerowe części rzeczywiste. Należy także dodać, że spełnienie warunku (14) prowadzi do pojawienia się dwóch pierwiastków z częścią rzeczywistą dodatnią, w wyniku czego ruch pocisku będzie niestateczny (nastąpi koziołkowanie).

4. OMÓWIENIE TWIERDZENIA GALPERINA - KRASOWSKIEGO

Z przytoczonego przykładu wynika jasno, że w przypadkach krytycznych o stateczności decydują wyrazy nieliniowe. Ustatecznienie ruchu niezaburzonego rozważać będziemy tylko dla przypadku, kiedy ruch bez sterowania jest niestateczny.

Jak wiadomo, ruch niezaburzony można ustatecznić, jeżeli spełniony jest warunek Kalmana:

$$rank \, \| \boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}, ..., \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \| = n, \tag{15}$$

gdzie n = dim **x**. Wówczas za pomocą odpowiedniego doboru macierzy układu zamkniętego (8) można uzyskać wartości własne o ujemnych częściach rzeczywistych. Jednak w takim przypadku nie ma znaczenia, jakie wartości mają pierwiastki równania charakterystycznego:

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{16}$$

Tak więc znajomość samych pierwiastków równania (16) uniemożliwia klasyfikację różnych przypadków dla układów sterowanych w sensie ich podziału na niekrytyczne i krytyczne. Klasyfikację taką opracowali w r 1963 Galperin i Krasowski [3] w postaci twierdzenia, ale nie jest ono szeroko znane.

Kluczowym zabiegiem jest wprowadzenie do równań specjalnej macierzy **S** o wymiarach m×n. Macierz tę wyznacza się z równania:

$$\boldsymbol{A W} = \boldsymbol{WS}, \tag{17}$$

gdzie:

$$m = rank\|\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB},...,\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}\| < n. \tag{18}$$

Widzimy więc, że wyznaczenie macierzy **S** wymaga rozwiązania liniowego równania macierzowego (17). Rozwiązanie to ma postać:

$$\sum_{j=1}^{r} w_{ij} S_{jk} = p_{ik}, \tag{19}$$

gdzie:

$$p_{ik} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} w_{lk}. \tag{20}$$

Z udowodnionego w pracy [3] twierdzenia wynikają następujące wnoski:

1) jeżeli widmo macierzy **S** zawiera wartości własne macierzy **A**, dla których

$$Re\ \lambda_i(\boldsymbol{A}) \geq 0\ , \quad i = 1,...,n, \tag{21}$$

to ruch niezaburzony układu (7) jest stabilizowany za pomocą sterowania liniowego (3) niezależnie od wyrazu nieliniowego ϕ (**x**,**Fx**);

2) jeżeli istnieje choćby jedna wartość własna macierzy **A** nie należąca do widma macierzy **S**, której część rzeczywista jest dodatnia, to ruch niezaburzony układu jest niestateczny;

3) jeżeli wszystkie wartości własne macierzy **A**, dla których:

$$Re\ \lambda_i(\boldsymbol{A}) > 0, \quad i = 1,...,n, \tag{22}$$

zawarte są w widmie macierzy **S**, ale istnieje choćby jedna wartość własna macierzy **A**, która ma zerową część rzeczywistą nie mieszczącą się w widmie macierzy **S**, to możliwość stabilizacji uwarunkowana jest wyrażeniem nieliniowym ϕ(**x**,**Fx**). Przypadek 3) nazywany jest przypadkiem krytycznym stabilizacji. Zatem zagadnienie stabilizacji z uwzględnieniem wyrażenia nieliniowego jest sens formułować tylko w tym przypadku.

Ze względu na mało przejrzysty charakter tych wniosków na Konferencji przedstawione będą przykłady techniczne (głównie z lotnictwa) ilustrujące te wnioski.

LITERATURA

[1] Michalski W. J., Pietrucha J. A.: Sterowanie czynne własnościami dynamicznymi samolotu nieodkształcalnego, MTiS z.3-4, T 28, 1990, ss. 333-351.

[2] Michalski W. J., Złocka M. A.: Wprowadzanie czynne samolotu w korkociąg, Konf. "Mechanika w Lotnictwie", PTMTiS, Warszawa 1992, ss. 561-574.

[3] Гальперин Е. А., Красовский Н. Н.: О стабилизации уста новившихся движений нелинейных управляемых систем, ПММ Т. XXVII, 1963, сс. 988-1004.

[4] Дмитриевский А. А. :Вхешная балистика, Машиностпоение, Москва, 1979.

Recenzent: Dr hab. inż. Andrzej Buchacz

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1993 r.

Abstract

In this paper we deal mainly with nonlinear control systems described by Eq. (8). In the special case of linear time-invariant, system (8) takes the form (1), where $x \in R^n$ is the state vector, $u \in R^r$ is the control vector. Assuming that the system (1) is controllable, the optimal regulator minimizing a performance index (2), where **Q** and **R** are positive definite matrices, is given by the control law (2), where **K** is positive definite solution of the Riccati Eq. (5).

In chap. 2 we state the following problem: what will happen if we apply the linear controller (3) to the nonlinear system (7). In another words: is it possible to stabilize the system (7) by means of controller (3). The natural tool for investigation of such problem is the stability theory by Liapunov.

In chap.3 we consider the nonlinear autonomous system (9), where ϕ is power series beginning with the terms of at least second degree. The theorems of L. permit establishing criteria of stability on the basis of the abridged (variational) Eq.(11). Among three of them is also the following:

If the characteristic eq. of the abridged eq. does not have any roots with positive real parts, but has some roots with zero real parts, then the terms in ϕ can be chosen as to have either stability or instability. This case belongs to the so-called critical cases, which

require a special investigation. In order to give a better idea of the nature of this problem be consider an example concerning the spinning projectile.

In chap.4 we present the principal conclusions of the theorem of Galperin-Krasowski, which give the key for the division of controlled system into critical and uncritical cases.