ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994

Seria: MECHANIKA z. 115 Nr kol. 1230

Jerzy SKRZYPCZYK
Katedra Mechaniki Teoretycznej
Politechnika Śląska

UWAGI O NOWEJ METODZIE LINEARYZACJI STATYSTYCZNEJ OPARTEJ NA MINIMALIZACJI BŁĘDU KWADRATOWEGO ENERGII POTENCJALNEJ

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę linearyzacji statystycznej wielowymiarowych dyskretnych układów dynamicznych. Zastosowana metoda oparta jest na minimalizacji różnicy między energią potencjalną oryginalnego systemu nieliniowego i energią przybliżonego układu liniowego. Dokładność metody jest sprawdzana na trzech przykładach układów dynamicznych, dla których znane są rozwiązania analityczne.

REMARKS ON A NEW STATISTICAL LINEARIZATION METHOD BASED ON MINIMUM MEAN SQUARE DEVIATION OF POTENTIAL ENERGY

Summary. The purpose of this paper is to present a new multi dimensional stochastic linearization technique. It is based on the requirement that a mean square deviation of the potential energy of the original nonlinear system,and that of the equivalent linear one, be minimal. The accuracy of known versions of statistical linearization methods is checked on examples of dynamical systems with available exact solutions.

ЗАМЕЧАНИЯ О НОВОМ МЕТОДЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ОСНОВАННОМ НА МИНИМАЛИЗАЦИИ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ ПОТЕНЦИАЛНОЙ ЕНЕРГИИ

Резюме. В работе представлено метод статистической линеаризации многомерных дискретных динамических систем. Представленный метод основан на минимализации ошибки между потенциалной енергей орыгинальной нелинейной системы и енергей приближенной линейной системы. Точность метода проверяется на трех примерах для которых известны точные пробабилистические решения.

1.WSTĘP

Technika linearyzacji statystycznej jest powszechnie stosowana w dynamice stochastycznej. Bogatą bibliografię tej problematyki można znaleźć w pracach [1-4,1-10,15] i w wielu innych.

Metoda linearyzacji statystycznej polega na zastąpieniu układu nieliniowego liniowym układem dynamicznym, który jest w pewnym "probabilistycznym" sensie równoważny układowi oryginalnemu.

Niech będzie dany nieliniowy układ dynamiczny, ewentualnie ze sprzężeniem zwrotnym, dany równaniem operatorowym:

$$x = AFx + z, \tag{1}$$

gdzie z jest n-wymiarowym procesem stochastycznym zdefiniowanym na $R^1_+ \subset R$, F jest nieliniowym operatorem, A jest przyczynowym,liniowym operatorem całkowym.Dla uściślenia załóżmy, że operatory F i A mają następującą postać:

$$(Fx)(t,\omega):=f(t,x(t,\omega)), \quad t\in R^1_+ \tag{2}$$

gdzie $f{:}R^1_+ xR^n \to R^n$ jest funkcją nieliniową i

$$(Ax)(t,\omega):=\int_0^t k(t,s)x(s,\omega)\mu(ds), \quad t\in R^1_+ \tag{3}$$

gdzie jądro k(t,s) jest zdefiniowane na Δ i $\Delta:=\{(t,s):t,s\in R^1_+,\ 0\le s\le t<\infty\}$, $k(t,s)=0$ dla $s>t$, $k(t,\cdot)\in L^1_{loc}(R^1_+)$ i całkowanie zachodzi dla zbioru $[0,t]\subset R^1_+$.

Generalnie metoda linearyzacji statystycznej polega na zastąpieniu problemu nieliniowego opisanego równaniem całkowym o postaci:

$$x(t,\omega) = z(t,\omega) + \int_0^t k(t,s)f(s,x(s,\omega))\mu(ds), \quad t\in R^1_+ \tag{4}$$

przez problem liniowy w następującej postaci:

$$y(t,\omega) = z(t,\omega) + \int_0^t k(t,s)l(s,y(s,\omega))\mu(ds), \quad t\in R^1_+ \tag{5}$$

gdzie $l(t,y):=C(t)y+c(t)$, $y,c(\cdot)\in R^n$, $C(\cdot):R^n\to R^n$,

W taki oto sposób sformułowanie metody linearyzacji statystycznej (MLS) jest podobne do podanego przez Kazakova i Bootona [3].

2. METODY LINEARYZACJI STATYSTYCZNEJ

W literaturze najbardziej znane są dwie klasyczne MLS.Pierwsza metoda polega na takim doborze macierzy $C_1(\cdot)$ i $c_1(\cdot)$, który minimalizuje następujący funkcjonał:

$$\rho_g(l) := E\{|f(t,x(t,\omega)) - l(t,x(t,\omega)|^2\} \tag{6}$$

dla $\forall t \in R$ i dla pewnej klasy procesów stochastycznych. Rozwiązanie tego zagadnienia jest znane i można go znaleźć np. w [1].

Metoda druga polega na takim doborze macierzy $C_2(\cdot)$ i $c_2(\cdot)$, aby funkcje losowe $l(t,x(t,\varphi))$ i $f(t,x(t,\varphi))$ miały takie same wartości oczekiwane i identyczne macierze kowariancji dla pewnej klasy procesów stochastycznych $x(t,\omega) \forall t \in R$. Niech

$$\Gamma_2(t) = E\{(f(t,x(t,\omega)) - E\{f(t,x(t,\omega))\})(f(t,x(t,\omega)) - E\{f(t,x(t,\omega))\})^T\} ,$$

$$D(t) = E\{(l(t,x(t,\omega)) - E\{l(t,x(t,\omega))\})(l(t,x(t,\omega)) - E\{l(t,x(t,\omega))\})^T\} = E\{(C(t)(x(t,\omega) - E\{x(t,\omega)\}))(C(t)(x(t,\omega) - E\{x(t,\omega)\}))^T\} = C(t)K(t)C^T(t) , \tag{7}$$

natomiast $K(\cdot)$ jest zdefiniowane w następujący sposób:

$$K(t) = E\{(x(t,\omega) - E\{x(t,\omega)\})(x(t,\omega) - E\{x(t,\omega)\})^T\} .$$

Zauważmy, że macierze $K(\cdot)$ i $\Gamma(\cdot)$ są symetryczne i nieujemnie określone. Stąd wynika, że istnieją macierze $K^{1/2}(\cdot)$ i $\Gamma^{1/2}(\cdot)$ $\forall t \in R$. Na podstawie równań (6) i (7) możemy napisać:

$$C_2(t)K^{\frac{1}{2}}(t) = \Gamma_2^{\frac{1}{2}}(t) , \tag{8}$$

A zatem macierze$C_2(\cdot)$ i $c_2(\cdot)$ przyjmują postać:

$$C_2(t) = \Gamma_2^{\frac{1}{2}}(t)K^{\frac{1}{2}}(t)$$
$$c_2(t) = E\{f(t,x(t,\omega)) - \bar{C}_2(t)E\{x(t,\omega)\}\} .$$

W [16] autorzy zaproponowali nową technikę linearyzacji statystycznej, polegającą na minimalizacji średniego kwadratowego błędu różnicy pomiędzy energią potencjalną związaną z oryginalnym nieliniowym układem a jego równoważną aproksymacją liniową. Poniżej przedstawiony jest ogólny schemat dla wielowymiarowych układów dynamicznych.

Niech energia potencjalna rozpatrywanego układu dynamicznego będzie oznaczona jako $U(\cdot)$, grad$U$=f, dla uproszczenia niech $U(0)=0$.

W nowym schemacie MLS będziemy wymagać, aby:

$$\begin{aligned}\rho := & E\{\,|U(x(t,\omega)) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ik}x_i(t,\omega)x_k(t,\omega)\,|^2\} = \\ = & E\{\,|U(x(t,\omega)) - \frac{1}{2}<x(t,\omega),Cx(t,\omega)>|^2\} = \\ = & E\{\,|U(x(t,\omega)) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x^T(t,\omega)C_i x_i(t,\omega)\,|^2\} = \min \quad ,\end{aligned} \tag{9}$$

gdzie

$$C=[c_{ik}]=[C_1,C_2,\dots,C_n]\ ,\ C_k=[c_{k1},c_{k2},\dots,c_{kn}]\ ,$$

dla i,k=1,2,...,n. Niech

$$\nabla_x = \left[\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^T .$$

Warunkiem koniecznym ekstremum jest

$$\begin{aligned}\nabla_{c_k}\rho &= E\{U(x(t,\omega)) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x^T(t,\omega)C_i x_i(t,\omega))x(t,\omega)x_k(t,\omega)\} = 0 \\ \Gamma_k &= \sum_{i=1}^{n} \phi_{ki}C_i \quad ,\end{aligned} \tag{10}$$

gdzie oznaczono

$$\Gamma_k := E\{U(x(t,\omega))x(t,\omega)x_k(t,\omega)\}\ ,\quad \phi_{ki} := E\{x_k(t,\omega)x_i(t,\omega)x(t,\omega)x^T(t,\omega)\}$$
$$\Gamma := [\Gamma_1,\Gamma_2,\dots,\Gamma_n]\ ,\Phi := [\phi_{ki}]\quad ,$$

dla i,k=1,2,...,n . Otrzymamy

$$2\Gamma = \Phi C \tag{11}$$

oraz jako rozwiązanie problemu

$$C_3 = 2\Phi^{-1}\Gamma\ . \tag{12}$$

Równanie (12) kończy nasze rozważania.

3. PRZYKŁADY

Dla porównania skuteczności przedstawionych MLS wybrano układ dynamiczny opisany równaniem różniczkowym w znormalizowanej formie

$$\ddot{x}(t)+\beta\dot{x}(t)+F(x(t))=z(t)\ ,\quad t\in R_+^1\ , \tag{13}$$

gdzie $(\cdot)$ = d/dt, β=const>0 określa współczynnik liniowego tłumienia, $F(\cdot)$, $x\in R^1$ reprezentuje nieliniową siłę sprężystą. Rozpatrywany będzie przypadek, gdy siła wymuszająca jest stacjonarnym procesem stochastycznym 2 rzędu ze średnią zero i gęstością spektralną postaci:

$$S_z(iu)=\frac{S_0}{1+u^2\tau^2}\ ,\quad u\in R_+^1\ , \tag{14}$$

gdzie $S_o>0$ i τ są pewnymi stałymi. Dla opisywanego przypadku możliwe jest określenie dokładnych charakterystyk probabilistycznych rozwiązania [14].

3.1. Przykład 1

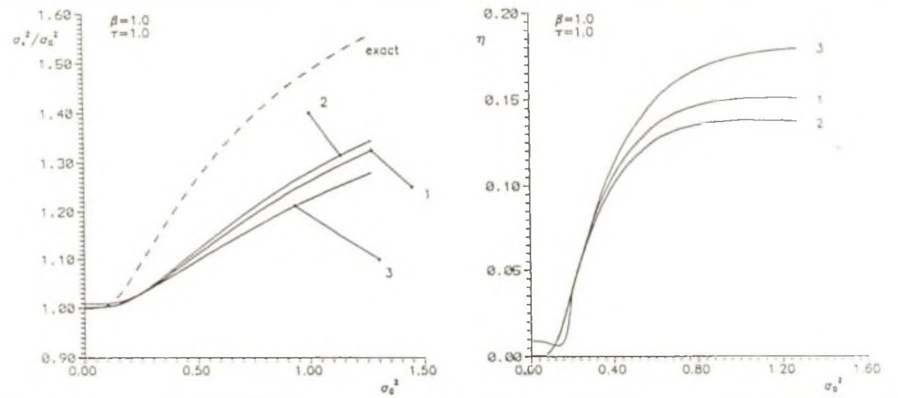
Zastosujmy przedstawioną teorię do układu dynamicznego będącego oscylatorem nieliniowym, którego charakterystyka sprężysta ma postać:

$$F(x)=\begin{cases} 0.5x\ , & dla\ x\le -1 \\ x\ , & dla\ -1<x<1\ . \\ 0.5x\ , & dla\ x\ge 1 \end{cases}$$

Dokładne średnie odchylenie kwadratowe rozwiązania $\sigma^2_{x,dok}$ można określić jak podano w pracy [14]. Wyniki z zastosowania linearyzacji statystycznej σ^2_x zostały obliczone zgodnie z przedstawioną teorią. Przez σ^2_o oznaczono średnie odchylenie kwadratowe rozwiązania układu liniowego, dla $F(x)=x$, $x\in R^1$
Interesująca może być obserwacja jak wygląda błąd względny

$$\eta=\frac{|\sigma_x^2-\sigma_{x,dok}^2|}{\sigma_{x,dok}^2}$$

różnych metod linearyzacji. Wyniki są dość jednoznaczne. Nowa metoda jest (poza małym zakresem zmienności σ_o, czyli S_o) gorsza od obu klasycznych MLS, zwłaszcza dla dużych wartości σ_o.



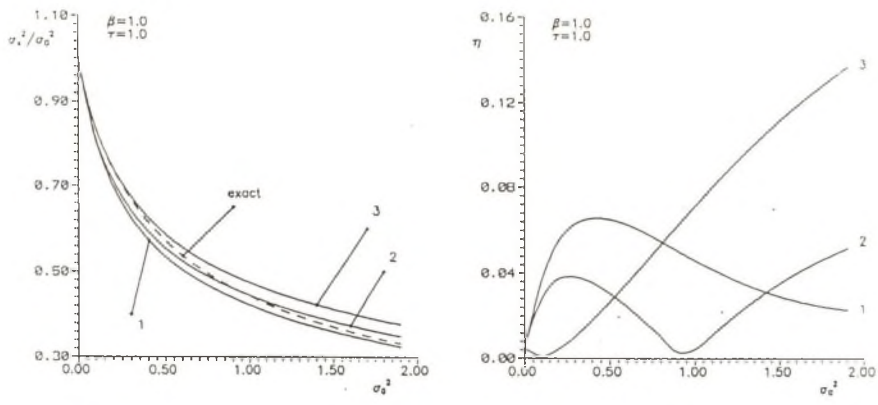
Rys.1. Porównanie błędów linearyzacji dla oscylatora nielinio-wego typu 1 dla różnych MLS (krzywa "i" odpowiada MLS typu "i")
Fig.1. Comparison of linearization errors for 1-st type oscillator for different methods (curve "i" corresponding to i-th method)

3.2. Przykład 2

Jako drugi przykład weźmy pod uwagę oscylator Duffing'a, którego charakterystyka sprężysta ma postać:

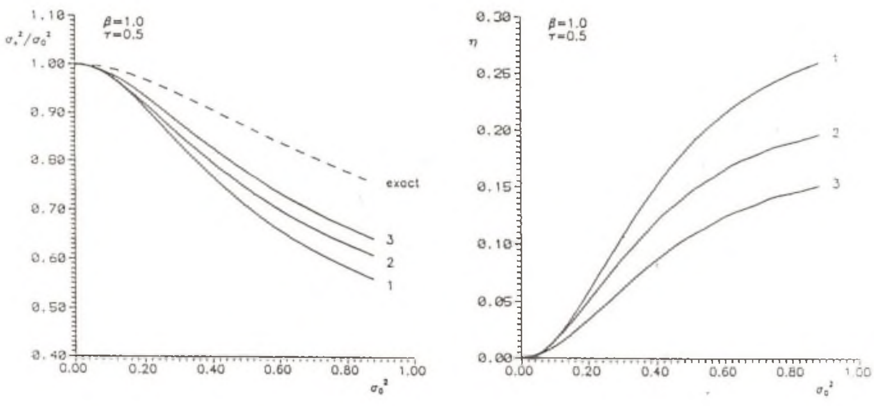
$$F(x) = k_1 x + k_2 x^3,$$

gdzie k_1, k_2 są pewnymi stałymi. Porównanie dokładności MLS było robione w pracy [16] dla zakłócenia typu białego szumu, dla względnie małych wartości $\sigma_0 \epsilon [0,1]$. W tym zakresie σ_0, rzeczywiście, można przyznać, że dokładność nowej MLS jest większa od obu metod klasycznych.
Dla większych wartości σ_0 dokładność metod klasycznych przewyższa dokładność metody nowej, zwłaszcza jeśli brać pod uwagę błąd względny. Odpowiednie wyniki są przedstawione na rys.2.



Rys.2. Porównanie błędów linearyzacji dla oscylatora nieliniowego typu 2 dla różnych MLS (krzywa "i" odpowiada MLS typu "i")

Fig.2. Comparison of linearization errors for 2-nd type oscillator for different methods (curve "i" corresponding to i-th method)



Rys.3. Porównanie błędów linearyzacji dla oscylatora nieliniowego typu 3 dla różnych MLS (krzywa "i" odpowiada MLS typu "i")

Fig.3. Comparison of linearization errors for 3-rd type oscilla-tor for different methods (curve "i" corresponding to i-th method)

3.3. Przykład 3

Przedyskutujmy jeszcze jeden przypadek oscylatora z charak-terystyką sprężystą o postaci:

$$F(x) = k_1x + k_2x^5 ,$$

gdzie k_1 i k_2 są pewnymi stałymi. Podobnie jak w przypadku 2 po-równania dokładności MLS były podane w pracy [16] dla zakłócenia będącego białym szumem. W tym przypadku przewaga metody nowej jest wyraźnie widoczna dla wszystkish wartości σ_0, co potwierdza wyniki cytowanej pracy [16]. Wyniki moża porównać na rys. 3.

4. WNIOSKI

W pracy porównano trzy MLS. Dla uzyskania pewnych wskazówek dotyczących dokładności nowej metody w porównaniu z metodami klasycznymi,wykorzystując wnioski z pracy [16] i wyniki [14] przeanalizowano trzy przykłady układów dynamicznych. Na podstawie powyższego można wnioskować, że nowa MLS wykazuje większą dokładność dla układów bardzo silnie nieliniowych (typu x^5) oraz dla układów silnie nieliniowych (typu x^3) dla mniejszych wartości intensywności zakłóceń. Dla układów słabo nieliniowych nowa metoda jest mniej dokładna niż metody klasyczne w zasadzie dla prawie wszystkich intensywności zakłócenia.

LITERATURA

[1] Bunke H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen Mit Zufälligen Parametren, Akademie-Verlag Berlin, 1972.
[2] Gutowski R., W. A. Swietlicki: Dynamika i drgania uładów mechanicznych, PWN, Warszawa 1986.
[3] Kazakow I. J.: Statisticzeskaja tieoria sistiem uprawlienia w prostranstwie sostojanij, "Nauka", Moskwa 1974.
[4] Krasowskij A. A.: Fazowoje prostranstwo i statisticzeskaja tieoria dinamiczeskich sistiem, "Nauka", Moskwa 1974.
[5] Piszczek K.: Drgania zdeterminowane i przypadkowe układu o jednym stopniu swobody przy charakterystyce sprężystości w postaci linii łamanej, Rozpr. Inż., Vol.18, N.4, (1970).
[6] Piszczek K.: Wpływ nieliniowości na niektóre charakterystyki drgań przypadkowych, Zag. Drgań Nielin., Vol.12, ss. 113-127.
[7] Piszczek K.: Metody stochastyczne w teorii drgań mechanicznych, PWN, Warszawa 1982.
[8] Piszczek K., J. Nizioł.: Random Vibration of Mechanical Systems, PWN, Warszawa 1986.

[9] Pugaczew W. S.: Tieoria słuczajnych funkcji i primienienia w tieorii awtomaticzieskowo uprawlienia, Moskwa 1962.
[10] Roberts J. B., P. D. Spanos: Random Vibrations and Statistical Linearization, J. Wilej, Chichester 1990.
[11] Skrzypczyk J.: Analysis of Statistical Linearization of Random Nonlinear Volterra Equations, Proc. of X^{th} Int. Conference on Nonlinear Oscillations, Varna 1984, Publ. Hause of Bulgarian Acad. Sci., Sofia 1985, ss. 750-753.
[12] Skrzypczyk J.: Statistical Linearization Of Nonlinear Dynamic Systems Described By Integral Equations Over Locally Compact Abelian Groups, Proceedings of Conference "Nonlinear And Random Vibrations", Oberwolfach 1986 September 14-20, Oberwolfach 1987.
[13] Skrzypczyk J.: Wyznaczanie dokładnych charakterystyk probabilistycznych w nieliniowych układach dynamicznych, Sympozjon "Modelowanie w Mechanice", Wisła luty 1993, Zesz. Nauk. Pol. Śl., ser. Mechanika z. 113, ss. 369-376.
[14] Skrzypczyk J.: Exact Steady-State Response Solution For Second Order Nonlinear Systems Under External Stationary Excitations, Mechanika Teoretyczna i Stosowana (w druku).
[15] Spanos P. D.: Stochastic Linearization in Structural Dynamics, Applied Mechanics Reviews (1981), ss. 1-8.
[16] Zhang X., I. Elishakoff, R. Zhang: A stochastic Linearization Technique Based on Minimum Mean Square Deviation of Potential Energies, Stochastic Structural Dynamics 1, New Theoretical Developments, Springer-Verlag, Berlin-Haidelberg-New York 1991, ss. 327-338.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Bogdan Skalmierski
Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1993.

Abstract

The purpose of this paper is to contrast a new multidimensional stochastic linearization technique with classic methods. It is based on the requirement that a mean square deviation of the potential energy of the original nonlinear system, and that of the equivalent linear one, be minimal. The resultings equations (12) are presented in details. The accuracy of known versions of statistical linearization methods is checked on 3 examples of dynamical systems of the type (13), for a stationary excitation with spectral density (14). For such systems the exact solutions for probability densities are available [14]. Generally conclusions are similar to that given in [16]. The new method turns out to be superior than conventional linearization techniques, for strongly nonlinear oscillators. However, for weakly nonlinear systems the onventional linearization methods yield more accurate results.