ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994

Seria: MECHANIKA z. 115 Nr kol. 1230

Krzysztof WERNEROWSKI
Katedra Mechaniki Stosowanej
Akademia Techniczno - Rolnicza w Bydgoszczy

ASYMPTOTYCZNA METODA ROZWIĄZANIA WIBRACJI GIĘTNYCH BELKI

Streszczenie. W artykule zasygnalizowano możliwość uzyskania wyników zbliżonych do rzeczywistości przez zastosowanie asymptotycznej metody rozwiązania wibracji giętnych belki zamocowanej przegubowo. W modelu uwzględniono działanie zmiennej siły osiowej i obciążenia poprzecznego.

Analizowano układ o zmiennych współczynnikach. Uwzględniono wibracje parametryczne i wymuszone.

Określono równanie różniczkowe ruchu belki. W asymptotycznej metodzie rozwiązania stwierdzono wyraźną zbieżność składowych rozwinięcia.

ASYMPTOTIC METHOD OF CHOSEN BEAM TRANSVERSE VIBRATIONS SOLUTION

Summary. The present paper points out the possibility of nearly exact calculations comparable with results of experimental research. Asymptotic method of chosen beam transverse vibration was used. Load depending from time is axial and continous. Variable action of the axial force and continous load was taken into consideration.

System with variable coefficients was analysed. Parametric and forced vibrations were taken into account.

A differential equation was described. The asymptotic solution is with distinct convergence of solution parts connected.

ASYMPTOTISCHE METHODE ZUR LÖSUNG DES PROBLEMS VON BIEGESCHWINGUNGEN DES BALKENS

Zusammenfaßung. Jn der Abhandlung wird es angekündigt, daß die Möglichkeit besteht, durch die Anwendung der asymptotischem Methode zur Lösung des Problems von Biegeschwingungen eines gelenkig befestigten Balkens die der Wirklichkeit angenäherten Ergebnisse zu erhalten. Im Modell hat man die Wirkung der Wechselaxialkraft und der Querbelastung berücksichtigt. Das System mit variablen Faktoren wird analysiert. Parametrische und erzwungene Schwingungen werden .in Rücksicht genommen. Man hat die Differentialgleichung des Balkensbewegung bestimmt. In der asymptotischen Lösungsmethode hat man deutliche Konvergenz von Komponenten der Abwicklung festgestellt.

1. WPROWADZENIE

Zagadnienie badania drgań giętnych belki występuje podczas analizy działania konstrukcji mechanicznych. Siła działająca osiowo jest przyczyną zmienności współczynników układu liniowego.

Szczególny przypadek działania zwykłej siły harmonicznej wzdłuż osi belki, zaliczony do drgań parametrycznych, można rozwiązać stosując [4] rozdzielanie zmiennych i następnie metodykę Mathieu.

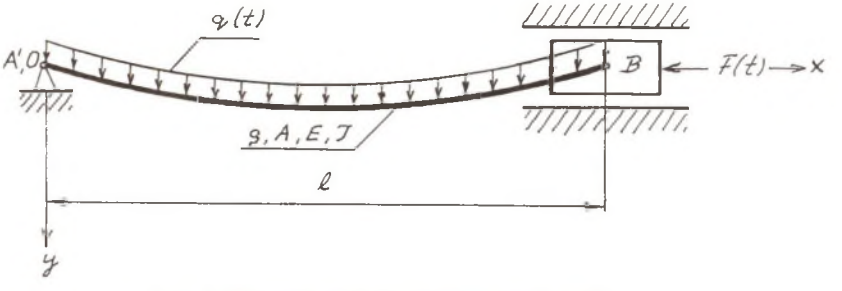
Natomiast uogólnione wibracje giętne belki z obciążeniem poprzecznym i osiowym można rozwiązać metodą asymptotyczną [2,3].

Uwzględnienie wyraźnej zbieżności składowych funkcji trygonometrycznych zapewnia dokładność rozwiązania zbliżoną do wyniku ścisłego, który jeszcze nie jest znany. Zbadano również zależność między parametrycznymi i wymuszonymi drganiami układu.

2. MODEL I RÓWNANIE GŁÓWNE

Przedmiotem analizy są drgania giętne belki zamocowanej przegubowo w układzie poziomym, obciążonej siłą osiową oraz siłą poprzeczną rozłożoną w sposób ciągły.

Na modelu (rys.1) pokazano działanie obciążenia harmonicznego q(t) i siły osiowej F(t).



Rys. 1. Schemat obciążenia i podparcia belki
Fig. 1. Diagram of loading and supporting of a beam

Równanie różniczkowe ruchu belki jest następujące:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{F(t)}{EJ}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\rho A}{EJ}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{q(t)}{EJ}, \tag{1}$$

$$y = y(x,t), \tag{1a}$$

$$F(t) = F_0 \sin^2 \bar{\alpha}, \tag{1b}$$

$$\overline{\alpha}=\overline{\omega}\ t+h(\tau), \tag{1c}$$

$$\tau=\omega\ t, \tag{1d}$$

$$q(t)\ =\ q_0\sin\overline{\alpha}, \tag{1e}$$

gdzie: ρ - gęstość materiału belki,
A - pole przekroju poprzecznego belki,
E - moduł Younga tworzywa belki,
J - moment bezwładności przekroju poprzecznego belki,
- - oznaczenie wartości średniej.

Podczas analizy uwzględniono warunki brzegowe i początkowe w postaci:

$$y(1,t)=y(0,t)=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(1,t)=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0,t)=0, \tag{2a}$$

$$t\geq 0, \tag{2b}$$

$$B(x)=y(x,0),\frac{dy}{dt}(x,0)=B(x), \tag{2c,d}$$

$$0\leq x\leq 1. \tag{2e}$$

Istotne jest przekształcenie równania głównego do postaci:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+C_y{}^4\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=\epsilon f, \tag{3}$$

$$C_y=\sqrt[4]{\frac{EJ}{\rho A}}\ . \tag{3a}$$

Przyjmuje się mały parametr korzystny dla dalszych obliczeń (6,6a,9a,b), wobec tego:

$$\epsilon=(\rho AEJ)^{-0,5}\prec\prec 1. \tag{3b}$$

3. ROZWIĄZANIE

Ogólna postać rozwiązania metodą asymptotyczną jest następująca:

$$y = C(t,\epsilon)sinD_1xcos[\beta(t,\epsilon)] + \epsilon F_1(x,t) + \epsilon^2 F_2(x,t) + \ldots \tag{4}$$

$$C = C_0 + \epsilon G_1(t,C_o,h) + \epsilon^2 G_2(t,C_0,h) + \ldots \tag{4a}$$

$$\beta = \omega_1 t + h + \epsilon H_1(t,C_0,h) + \epsilon^2 H_2(t,C_0,h) + \ldots \tag{4b}$$

$$y_1 = C_1\cos(C_1 t + \delta_1)sinD_1x. \tag{4c}$$

Istnieje możliwość rozwinięcia (3) funkcji f w szereg potęgowy:

$$f = f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \ldots + \epsilon^n f_n. \tag{5}$$

Na podstawie (1,1b,1e) można określić zależność:

$$\epsilon f = \bar{\omega}\,(q_0\sin\bar{\alpha} - F_0\sin^2\bar{\alpha}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,), \tag{6}$$

$$\bar{\omega} \approx \sqrt[4]{\frac{EJ}{\rho A}}\,, \tag{6a}$$

czyli

$$\epsilon f_0 = \bar{\omega}(q_0\sin\bar{\alpha} + F_0\sin^2\bar{\alpha}\; C_1^{\,2}\; C_0\cos\bar{\alpha})\sin C_1 x. \tag{6b}$$

Przybliżenie następne oblicza się wzorem:

$$\epsilon f_{01} = \bar{\omega}\,(q_0\sin\bar{\alpha} + F_0\sin^2\bar{\alpha}\; C_1^{\,2}\; C_0\cos\bar{\alpha}\; t\; \ldots) \tag{7}$$

Istotnym zagadnieniem dla metody asymptotycznej jest analiza zbieżności uśrednień:

$$\overset{M}{\underset{t}{}}(f_{01}\sin\overline{\alpha}) \equiv \lim_{t_k \to \infty} \frac{1}{t_k}\int (q_o \sin^2\overline{\alpha} + C_1^2 C_o \sin^3\overline{\alpha})dt = \frac{q_o}{2} \tag{8a}$$

$$\overset{M}{\underset{t}{}}(f_{01}\cos\overline{\alpha}) \equiv \lim_{t_k \to \infty} \frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} (q_o \sin\overline{\alpha}\cos\overline{\alpha} + C_1^2 C_o \sin^2\overline{\alpha}\cos^2\overline{\alpha})dt = \frac{1}{8}C_1^2 C_o \tag{8b}$$

wobec tego

$$\frac{dC_o}{dt} = -\frac{\epsilon}{2}C_o \overset{M}{\underset{t}{}}(f_{01}\sin\overline{\alpha}) = -\frac{\epsilon q_o C_o}{4}, \tag{9a}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\overset{M}{\underset{t}{}}\epsilon(f_{01}\cos\overline{\alpha}) = -\frac{\epsilon}{8}C_1^2 C_o. \tag{9b}$$

Całkujemy układ równań:

$$\int_{C_{so}}^{C_o} \frac{dC_o}{C_o} = -\frac{\epsilon q_o}{4}\int_0^t dt, \tag{10}$$

$$\ln\frac{C_o}{C_{so}} = -\frac{\epsilon q_o}{4}t, \tag{10a}$$

$$C_o = C_{so}e^{-\frac{\epsilon q_o}{4}t}, \tag{10b}$$

$$h = -\frac{3}{8}C_1^2 C_o t, \tag{11}$$

$$t_o = 0\,,\; h_o = 0. \tag{11a,b}$$

Następnie wyrazy są określone równaniami:

$$\frac{\partial G_1}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\omega}}\left(f_{01}\sin\bar{\alpha} - \overset{M}{\underset{t}{\cdot}}(f_{01}\sin\bar{\alpha})\right) + \beta C_o sin2\bar{\alpha}, \tag{12a}$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} = \frac{1}{C_o\bar{\omega}}\left(f_{01}\sin\bar{\alpha} - \overset{M}{\underset{t}{\cdot}}(f_{01}\sin\bar{\alpha})\right) + \beta C_o cos2\bar{\alpha}, \tag{12b}$$

$$\beta = \frac{\omega_1 - \bar{\omega}}{\bar{\omega}}, \tag{12c}$$

czyli:

$$\frac{\partial G_1}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\omega}}\left(q_0\sin^2\bar{\alpha} + C_1^2 C_o \sin^3\bar{\alpha}\cos\bar{\alpha} - \frac{q_o}{2}\right) + \beta C_o \sin^2\bar{\alpha}, \tag{13a}$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} = -\frac{1}{C_o\bar{\omega}}\left(q_o\sin\bar{\alpha}\cos\bar{\alpha} + C_1^2 C_o \sin^2\bar{\alpha}\cos^2\bar{\alpha} - \frac{1}{8}C_1^2 C_o\right) + \beta\cos\bar{\alpha}, \tag{13b}$$

wobec tego dla $t_0 = 0$ i wartości średnich

$$G_1 \to \overline{G_1}\;,\; H_1 \to \overline{H_1}, \tag{14a,b}$$

$$\overline{G_1} = \frac{1}{4\bar{\omega}}(\sin^2\bar{\alpha} - C_1^2 C_o \sin^4\bar{\alpha}) - \frac{\beta C_o}{2}\cos^2\bar{\alpha}, \tag{15a}$$

$$\overline{H_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{q_o}{C_o\bar{\omega}}\sin^2\bar{\alpha} + \frac{1}{16}C_1^2 C_o \sin^4\bar{\alpha}\right) = \beta\sin\bar{\alpha}. \tag{15b}$$

Na podstawie następnego równania przybliżonego:

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2}+C_y^4\frac{\partial^4 F_1}{\partial x^4}=\sum_{k=2}^{d_o\leq\infty} f_{ok}(\delta,\tau,C_o,\bar{\alpha})\sin D_k x \tag{16}$$

obliczono $F_1 = F_1(x,t)$.

Rozwiązanie (4) analizowanego równania głównego (1) określone jest w postaci:

$$y=[C_o+\frac{\epsilon}{4\bar{\omega}}(\sin 2\bar{\alpha}-C_1^2C_2\sin^4\bar{\alpha})-\frac{C_o}{2}\cos 2\bar{\alpha})\cdot$$

$$\cdot\sin D_1 x\cos[\omega_1 t-\frac{3}{8}C_1^2C_o t+\frac{\epsilon}{2}(\frac{q_o}{C_o\bar{\omega}}\sin^2\bar{\alpha}+\frac{1}{16}C_1^2C_o\sin 4\bar{\alpha}+ \tag{17}$$

$$+\beta\sin\bar{\alpha}+\epsilon F_1(x,t)+...].$$

4. WNIOSKI

1. Rozwiązany w niniejszej pracy model drgań giętnych belki obciążonej w sposób ciągły i osiowo jest ogólniejszy od spotkanych w dostępnej literaturze.
2. Zbieżność składowych rozwinięcia jest wystarczająca dla metody asymptotycznej.

LITERATURA

[1]. C.M.Harris, Ch.E.Crede: Shock and Vibration Handbook, Mc Graw Hill, New York 1961.
[2]. Ju.A.Mitropolskij: Metod usredneja w nelinejnoj mechanike, Naukowa Dumka, Kijów 1971.
[3]. Ju.A.Mitropolskij, B.I.Mossenkow: Asimptoticzeskije rescenija zerawnenij w czastnych proizwodnych, Wyższa Szkoła, Kijów 1976.
[4]. Z.Osiński: Teoria drgań, wydanie drugie, PWN, Warszawa 1980.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Świder

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1993 r.

Abstract

A procedure for solving the problem of transverse vibration of a beam mounted by articulation when applying an asymptotic method of solution has been presented in the paper.

The beam under analysis was loaded with axial force varying in time and with variable transverse load being continuously distributed. The assumed mathematical model of the beam in a form of a differential equation of motion with variable factors made the basic for testing of parametric vibrations and forced vibrations.

An analysis bas been carried aut as regards convergence in averaging when applying the asymptotic method and a visible convergence of components of the obtained expansion has been found and accepted as sufficient in case of the assumed method of solution.