

Andrzej Antoni CZAJKOWSKI  
Instytut Matematyki  
Uniwersytet Szczeciński

Krzysztof WIERZCHOLSKI  
Wydział Mechaniczny  
Politechnika Szczecińska

### OSOBLIWOŚCI ROZKŁADU PRĘDKOŚCI CIECZY MIĘDZY DWOMA POWIERZCHNIAMI CYLINDRYCZNYMI REOMETRÓW W POLACH ELEKTROMAGNETYCZNYCH

**Streszczenie.** Praca przedstawia analizę rozkładu wartości prędkości izotermicznej newtonowskiej cieczy dla przepływu między cylindrycznymi powierzchniami reometru w polu elektromagnetycznym. W tym polu wraz ze wzrostem liczb Hartmanna i przy ustalonej prędkości obrotowej cylindra reometru obserwuje się wzrost wartości prędkości cieczy względem prędkości, gdy nie ma pola elektromagnetycznego. Świadczy to o dodatkowym generowaniu się pola prędkości cieczy w polu elektromagnetycznym.

### SINGULARITIES OF THE VELOCITY FLUID DISTRIBUTION BETWEEN TWO CYLINDRICAL SURFACES OF THE RHEOMETERS IN THE ELECTROMAGNETIC FIELDS

**Summary.** The paper shows the analysis of the fluid velocity distribution of the electrically conducting and isothermic Newtonian fluid in the electromagnetic field during the flow in the rotational rheometer gap. In that field the increase of Hartmann numbers (with the constant stirrer's angular velocity) mean the increase of the fluid velocity values in compare with the case when is no that field. It means an extra generating of the velocity field created only by the electromagnetic field.

### ОСОБЕННОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ РЕОМЕТРОВ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

**Резюме.** В работе представлен анализ распределения значений скорости изотермической ньютоновской жидкости при ее движении между поверхностями цилиндрического реометра в электромагнитном поле. В этом поле возрастание индекса Хартманна (с постоянной угловой скоростью цилиндра реометра) означает возрастание значений скорости жидкости по сравнению со скоростью жидкости когда этого поля нет. Этот результат означает генерирование дополнительного поля скорости жидкости в электромагнитном поле.

## 1. WSTĘP

Praca przedstawia analizę bezwymiarowych wartości prędkości cieczy w czasie jej przepływu w polu elektromagnetycznym w reometrze rotacyjnym. Zatem istotą a zarazem celem rozważań jest wyznaczenie pola prędkości cieczy wywołanego polem elektromagnetycznym w reometrze. Według opinii autorów oryginalnością pracy jest wyodrębnienie w sposób analityczny pola prędkości, wywołanego polem elektromagnetycznym, od pola prędkości cieczy, wywołanego ruchem cylindra wewnętrznego reometru. W przypadku klasycznym przepływ cieczy jest wywołany ruchem obrotowym cylindra wewnętrznego reometru. W pracy uwzględnia się dodatkowo wpływ pola elektromagnetycznego na rozkład prędkości cieczy. Uzyskane pole prędkości przepływu cieczy jest sumą wartości prędkości wywołanej ruchem obrotowym cylindra reometru i wartości prędkości generowanej przez pole elektromagnetyczne. W pracy wykazano, że w przypadku braku obrotu cylindra wewnętrznego reometru może występować przepływ cieczy pod warunkiem istnienia pola elektromagnetycznego.

Przyjmuje się uproszczenia, polegające na tym, że lepkość dynamiczna cieczy  $\mu$  w [Pa s] jest stała i nie zależy od ciśnienia  $p$  w [Pa], temperatury  $T$  w [K] i indukcji magnetycznej  $B$  w [N/Am<sup>2</sup>]. Ponadto zakłada się niezerową składową obwodową  $V_\phi = V_\phi(r)$  wektora prędkości cieczy  $v$  [m/s], zależną tylko od współrzędnej promieniowej  $r$  w [m]. Przyjmuje się, że składowa promieniowa  $V_r$  i pionowa  $V_z$  wektora prędkości cieczy są pomijalnie małe. Schemat reometru rotacyjnego przedstawia rys. 1.

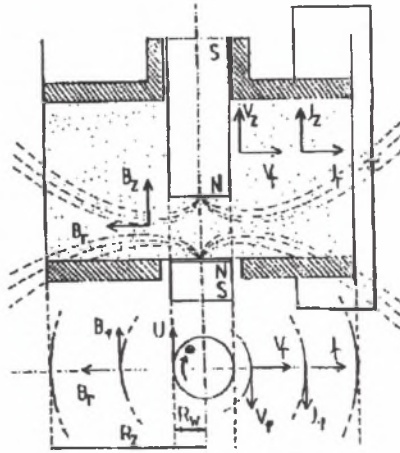
## 2. PODSTAWOWE RÓWNANIA

Badany przepływ cieczy opisują równania ruchu, równanie ciągłości i równania Ohma o następującej postaci [3]:

$$\rho \frac{dv}{dt} = \text{div } S + J \times B, \quad (1)$$

$$\text{div } v = 0, \quad (2)$$

$$J = \sigma(E + v \times B). \quad (3)$$



Rys.1. Schemat reometru z ruchomym cylindrem wewnętrznym pracującym w polu elektromagnetycznym

Fig.1. Section of the reometer with the moving internal cylinder working in the electromagnetic field

gdzie związki fizyczne pomiędzy współzrędnymi tensora naprężeń a współzrędnymi tensora prędkości deformacji są następujące:

$$S = 2\mu T_d - (p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} v) \delta \quad (4)$$

Współzrędnymi tensora naprężeń, tensora prędkości deformacji oraz tensora jednostkowego przedstawiają macierze [3]:

$$T_d = \begin{vmatrix} \theta_{rr} & \theta_{r\varphi} & \theta_{rz} \\ \theta_{\varphi r} & \theta_{\varphi\varphi} & \theta_{\varphi z} \\ \theta_{r\varphi} & \theta_{\varphi\varphi} & \theta_{zz} \end{vmatrix}, \quad S = \begin{vmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\varphi} & \tau_{rz} \\ \tau_{\varphi r} & \tau_{\varphi\varphi} & \tau_{\varphi z} \\ \tau_{r\varphi} & \tau_{\varphi\varphi} & \tau_{zz} \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (5)$$

W równaniu (1) iloczyn  $J \times B$  oznacza siły Lorentza, które opisują elektromagnetyczne oddziaływania w cieczy. Symbol  $\sigma$  to przewodność elektryczna właściwa cieczy w [S/m],  $J$  - wektor gęstości prądu elektrycznego w [A/m<sup>2</sup>],  $B$  - wektor indukcji magnetycznej w [N/Am<sup>2</sup>]. Wprowadza się następujące założenia upraszczające [4]:

$$B_r \neq 0, \quad B_\varphi = 0, \quad B_z = 0, \quad (6)$$

$$V_r = 0, \quad V_\varphi \neq 0, \quad V_z = 0, \quad (7)$$

$$J_r = 0, \quad J_\varphi = 0, \quad J_z \neq 0, \quad (8)$$

gdzie:  $J_z = J_z(r)$  - pionowa składowa wektora  $J$ , (pomija się składową promieniową  $J_r$  i obwodową  $J_\varphi$  wektora  $J$ ),  $B_r = B_r(r)$  - składowa promieniowa wektora  $B$ , (pomija się składową obwodową  $B_\varphi$  i pionową  $B_z$  wektora  $B$ ).

Wprowadza się zależności [4]:

$$V_{\varphi_1} = \frac{V_\varphi}{U}, \quad r_1 = \frac{r}{R_w}, \quad e_z = \frac{E_z}{UB_0}, \quad U = \omega R_w, \quad D = \frac{R_z}{R_w}, \quad (9)$$

gdzie:  $V_{\varphi_1}$  - bezwymiarowa prędkość cieczy,  $\omega$  - prędkość kątowna cylindra reometru w [1/s],  $U$  - prędkość obrotowa cylindra reometru w [m/s],  $R_z$  i  $R_w$  - długości promieni cylindrów wewnętrznego i zewnętrznego w [m],  $r_1$  - bezwymiarowa współrzędna promieniowa,  $B_0$  - charakterystyczna wartość indukcji magnetycznej w [N/Am<sup>2</sup>],  $E_z$  - składowa pionowa wektora natężenia pola elektrycznego w [V/m],  $e_z$  - bezwymiarowy wskaźnik natężenia prądu elektrycznego. Bezwymiarową zmodyfikowaną liczbę Hartmanna  $Ha^*$  określa się następującym wzorem:

$$Ha^* = (R_z - R_w) B_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}, \quad R_z > R_w \quad (10)$$

Biorąc pod uwagę założenia upraszczające (6)-(8) i związki (9)-(10) w równaniach (1)-(3) otrzymuje się następującą bezwymiarową postać równania ruchu cieczy:

$$\frac{d^2 V_{\varphi_1}}{dr_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{dV_{\varphi_1}}{dr_1} - \left[ \frac{1}{r_1^2} + (Ha^*)^2 \right] V_{\varphi_1} = -e_2 (Ha^*)^2 \quad (11)$$

gdzie niewiadomą jest funkcja prędkości cieczy  $V_{\varphi_1} = V_{\varphi_1}(r_1)$  dla  $1 \leq r_1 \leq D$ ,  $1 < D < +\infty$ . Równania Maxwella z przyjętymi uproszczeniami (6)-(10) w prezentowanym modelu są tożsamościowo spełnione.

Wartość prędkości cieczy na powierzchni ruchomego cylindra wewnętrznego jest równa wartości prędkości obrotowej cylindra. Natomiast wartość prędkości cieczy na powierzchni nieruchomego cylindra zewnętrznego jest równa zero. Stąd warunki brzegowe dla równania (11) mają postać [4]:

$$V_1(r_1 = 1) = 1, \quad V_1(r_1 = D) = 0 \quad (12)$$

Rozwiązanie ogólne równania (11) ma postać:

$$V_{\varphi_1}(r_1) = C_1 I_1(r_1 Ha^*) + C_2 K_1(r_1 Ha^*) + V(r_1 Ha^*), \quad (13)$$

gdzie:  $C_1$ ,  $C_2$  - stałe całkowania,  $V$  - rozwiązanie szczególne równania różniczkowego niejednorodnego (11). Wstawiając warunki brzegowe (12) do rozwiązania (13) równania (11) uzyskuje się układ równań algebraicznych, skąd otrzymuje się stałe  $C_1$ ,  $C_2$ :

$$C_1 = \frac{1}{M} [K_1(D \cdot Ha^*) - V(Ha^*) K_1(D \cdot Ha^*) + V(D \cdot Ha^*) K_1(Ha^*)], \quad (14)$$

$$C_2 = \frac{1}{M} [-I_1(D \cdot Ha^*) + V(Ha^*) I_1(D \cdot Ha^*) - V(D \cdot Ha^*) I_1(Ha^*)], \quad (15)$$

$$M = I_1(Ha^*) K_1(D \cdot Ha^*) - K_1(Ha^*) I_1(D \cdot Ha^*) \quad (16)$$

W pracy rozpatrywane są funkcje zmodyfikowane Bessela  $I_1$ ,  $K_1$  i 2 rodzaju rzędu pierwszego, które mają postać [1]:

$$I_1(r_1 Ha^*) = \frac{1}{Ha^*} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} r_1 Ha^*\right)^{2k+1}}{k!(k+1)!} \quad \text{dla } |\arg(r_1 Ha^*)| < \pi, \quad (17)$$

$$K_1(r_1 Ha^*) = \frac{1}{r_1} + \frac{Ha^*}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} r_1 Ha^*\right)^{2k+1}}{k!(k+1)!} \left[ 2 \ln \left( \frac{r_1 Ha^*}{2} \right) - \Psi(k+1) - \Psi(k+2) \right] \quad (18)$$

Biorąc pod uwagę wzory (16) i (18) oraz wartości funkcji  $\Psi$ -Eulera, tzn.  $\Psi(1)=0.5772$ ,  $\Psi(2)=0.4228$ ,  $\Psi(3)=0.9228$  rozwiązanie ogólne (13) równania (11) ma postać następującego szeregu:

$$\begin{aligned}
 V(r_1) = e_z V^*(r_1) = e_z \left\{ -\frac{1}{3}(r_1 Ha^*)^2 - \frac{1}{45}(r_1 Ha^*)^4 - \frac{1}{1575}(r_1 Ha^*)^6 + \right. \\
 - \frac{1}{99225}(r_1 Ha^*)^8 - \frac{1}{9823275}(r_1 Ha^*)^{10} - \frac{1}{1404728325}(r_1 Ha^*)^{12} + \\
 - \frac{1}{2.739220224E+11}(r_1 Ha^*)^{14} - \frac{1}{6.985011561E+13}(r_1 Ha^*)^{16} + \\
 - \frac{1}{2.256158730E+16}(r_1 Ha^*)^{18} - \frac{1}{9.002073330E+18}(r_1 Ha^*)^{20} + \\
 \left. - \frac{1}{4.348001418E+21}(r_1 Ha^*)^{22} - \frac{1}{2.50010081E+24}(r_1 Ha^*)^{24} + \dots \right\} \quad (19)
 \end{aligned}$$

Stałe (14)-(16), wzory (17)-(18) i szereg (19) wykorzystano w analizie numerycznej wzoru (13), wyrażającego prędkość cieczy.

### 3. OSOBLIWOŚCI ROZKŁADU PRĘDKOŚCI CIECZY

- 1) Gdy liczba Hartmanna  $Ha^*$  dąży do zera, to oznacza brak pola elektromagnetycznego. Uzyskuje się wtedy następujące granice:

$$K_1(Ha^*) \rightarrow 1, \quad K_1(D \cdot Ha^*) \rightarrow \frac{1}{D}, \quad K_1(r_1 Ha^*) \rightarrow \frac{1}{r_1}, \quad (20)$$

$$I_1(Ha^*) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad I_1(D \cdot Ha^*) \rightarrow \frac{D}{2}, \quad I_1(r_1 Ha^*) \rightarrow \frac{r_1}{2}, \quad (21)$$

$$V(Ha^*) \rightarrow 0, \quad V(D \cdot Ha^*) \rightarrow 0, \quad V(r_1 Ha^*) \rightarrow 0 \quad (22)$$

Po uwzględnieniu granic (20)-(22) we wzorach (13)-(16) otrzymuje się znany rozkład prędkości cieczy [2] s.888, wzór 19.14):

$$V_{\varphi_1}(r_1) = \frac{D}{D^2-1} \left( \frac{D}{r_1} - \frac{r_1}{D} \right) \quad (23)$$

2) Gdy prędkość obwodowa cylindra wewnętrznego  $U$  dąży do zera, to dodatkową wartość prędkości cieczy przedstawia wzór:

$$\lim_{U \rightarrow 0} V_{\varphi}(r) = \lim_{U \rightarrow 0} [U \cdot V_{\varphi_1}(r_1)] = \lim_{U \rightarrow 0} \left[ U \cdot \frac{1}{C_1 I_1(r_1) + C_2 K_1(r_1) + V(r_1)} \right] \quad (24)$$

Przedstawiona granica jest symbolem nieoznaczonym typu 0/0. Po zastosowaniu reguły de l'Hospitala otrzymuje się:

$$\lim_{U \rightarrow 0} V_{\varphi}(r) = E_z B_0 (R_z - R_w)^2 \frac{\sigma}{\mu} V^*(r_1) \quad (25)$$

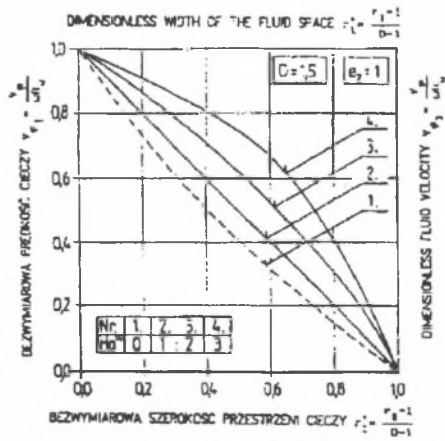
Wzór (25) oznacza, że w przypadku, gdy cylinder wewnętrzny reometru nie porusza się, istnieje pewna niezerowa dodatkowa wartość prędkości cieczy wywołana wyłącznie polem elektromagnetycznym. Wartość ta będzie przedmiotem dalszych badań. Na rys.2 i rys.3 krzywa nr.1 oznacza znany rozkład prędkości w przypadku, gdy nie ma pola elektromagnetycznego ( $Ha^* \equiv 0$ ), a krzywe nr.2,3,4 oznaczają rozkłady wartości prędkości cieczy w przepływie w polu elektromagnetycznym ( $Ha^* = 1$ ,  $Ha^* = 2$ ,  $Ha^* = 3$ ) w przypadku ruchu obrotowego cylindra reometru.

Rysunek 2 ukazuje rozkłady wartości prędkości cieczy dla wskaźnika natężenia prądu elektrycznego  $e_z = 1$ , natomiast Rysunek 3 dla wskaźnika  $e_z = 2$ .

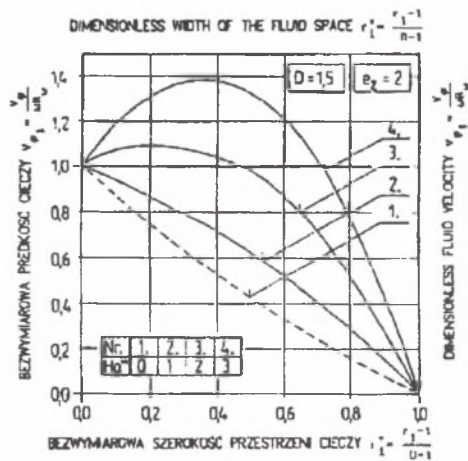
#### 4. WNIOSKI

Dla reometrów o typowej bezwymiarowej szerokości szczeliny  $1.3 \leq D \leq 1.5$  podczas przepływu cieczy w polu elektromagnetycznym prawdziwe są następujące wnioski:

**Wniosek 1.** W przepływie cieczy w obecności pola elektromagnetycznego i przy istnieniu ruchu obrotowego cylindra reometru obserwuje się wraz ze wzrostem zmodyfikowanych liczb Hartmanna ( $1 \leq Ha^* \leq 3$ ) wzrost bezwymiarowych wartości prędkości cieczy w porównaniu z wartościami prędkości dla przepływu bez udziału tego pola ( $Ha^* \equiv 0$ ). Fakt ten uzasadnia się wzrostem współczynnika przewodności elektrycznej właściwej cieczy wraz ze wzrostem zmodyfikowanej liczby Hartmanna. Wzrost wartości prędkości cieczy, ponad wartości uzyskane przez H.Brauera w pracy [2] (krzywa nr 1 na rys.2&3), wywołany jest jednoczesnym działaniem pola elektromagnetycznego i ruchem obrotowym cylindra reometru. Wartości te nie są wywołane wyłącznie polem elektromagnetycznym.



Rys.2. Rozkłady bezwymiarowych wartości prędkości cieczy dla parametrów  $D=1.5$ ,  $e_z = 1, 0 \leq Ha^* \leq 3, 0 \leq r_1^* \leq 1, 1 < r_1 < D$   
 Fig.2. Dimensionless values of the velocity fluid distributions for the parameters  $D=1.5$ ,  $e_z = 1, 0 \leq Ha^* \leq 3, 0 \leq r_1^* \leq 1, 1 < r_1 < D$



Rys.3. Rozkłady bezwymiarowych wartości prędkości cieczy dla parametrów  $D=1.5$ ,  $e_z = 2, 0 \leq Ha^* \leq 3, 0 \leq r_1^* \leq 1, 1 < r_1 < D$   
 Fig.3. Dimensionless values of the velocity fluid distributions for the parameters  $D=1.5$ ,  $e_z = 2, 0 \leq Ha^* \leq 3, 0 \leq r_1^* \leq 1, 1 < r_1 < D$



**Wniosek 2** . Wzrost bezwymiarowego wskaźnika natężenia pola elektromagnetycznego dla  $1 \leq e_z \leq 2$  powoduje wzrost bezwymiarowych wartości prędkości cieczy o własnościach newtonowskich.

**Wniosek 3** . Dla reometrów o szerokości szczeliny  $1.3 \leq D \leq 1.7$  oraz dla wskaźnika natężenia prądu elektrycznego  $e_z = 2$  w przedziale zmodyfikowanych liczb Hartmanna  $1 \leq Ha^* \leq 3$  pojawia się w obszarze przepływu cieczy pewne ekstremum lokalne wartości prędkości cieczy, które ma wartość większą o około 30% od wartości prędkości ruchomego cylindra wewnętrznego urządzenia pomiarowego. Fakt ten świadczy o tym, że w tych przypadkach dodatkowa wartość prędkości cieczy jest wywołana wyłącznie siłami Lorentza bez udziału ruchu obrotowego cylindra wewnętrznego reometru rotacyjnego.

#### LITERATURA

- [1] Antoniewicz J.: Tablice funkcji dla inżynierów, Warszawa : PWN, 1969
- [2] Brauer H.: Grundlagen der Einphasen und Mehrphasenströmungen, Aarau: Verlag Sauerländer, 1971
- [3] Hughes W.F., Young F.J.: Electromagnetodynamics of Fluids, New York-London: John Wiley & Sons, 1981
- [4] Wierzcholski K., Czajkowski A.A.: Electromagnetodynamics Fluid Flow in the Cylindrical Mixer, The Proceedings of the IV-th International Conference of Fluid Mechanics, Alexandria, Arab Republic of Egypt, Vol.3,1992, pp.303-308

Recenzent: prof. dr hab. inż. R. Gryboś

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1994 r.