

Grzegorz GALIN, Zbigniew ORŁOŚ  
Katedra Mechaniki Teoretycznej i Wytrzymałości Materiałów  
Wojskowa Akademia Techniczna

## NAPRĘŻENIA CIEPLNE W MODELU OSIOWO-SYMETRYCZNYM POŁĄCZENIA TARCZY KOŁOWEJ Z INKLUZJĄ PIERŚCIENIOWĄ

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono badania stanu naprężenia wywołanego obciążeniem cieplnym inkluzji pierścieniowej w tarczy kołowej. Materiałem tarczy była żywica epoksydowa, a inkluzji stop aluminium.

W badaniach stosowano metodę termoelastoptyczną oraz prowadzono obliczenia metodą elementów skończonych. Przedstawiono wnioski dotyczące charakteru naprężeń w obszarze połączenia inkluzji z tarczą kołową.

## THERMAL STRESSES IN THE MODEL OF THE RING INCLUSION IN THE CIRCULAR PLATE

**Summary.** An investigation of thermal stresses that appear around the ring inclusion in the circular plate made of photoelastic material Araldite B is described. The inclusion was made of aluminium alloy-Dural. The effect of thermal load was experimentally studied by means of photothermoelasticity. The results of experimental investigations have been compared with the results of theoretical investigations and numerical computations with the help of FEM model.

## ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В МОДЕЛИ СОЕДИНЕНИЯ КОЛЬЦА И ДИСКА ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

**Резюме.** В работе рассматривается исследование температурных напряжений в случае соединения круглого дуралевого кольца и диска постоянной толщины, изготовленного из эпоксидной смолы Аральдиз Б. Целью представленной работы является исследование характера напряженного состояния вблизи краев включения стационарным и нестационарным распределением температуры.

Исследования выполнены методом термофотоупругости и методом конечных элементов.

### 1. WSTĘP

Zagadnienie analizy naprężeń cieplnych w elementach płaskich i złożonych z części wykonanych z materiałów o różniących się właściwościach było rozpatrywane w pracach [1-3]. We wcześniejszych badaniach doświadczalnych stosowano często metodę termoela-

stooptyczną prześwietlania światłem spolaryzowanym modeli płaskich podlegających obciążeniom cieplnym. W przypadkach badania modeli bardzo cienkich można przyjąć, że wyznaczone rzędy izochrom określają wartości różnic naprężeń głównych, które to naprężenia nie zmieniają zarówno wartości jak i kierunków w punktach znajdujących się na tej samej prostej prostopadłej do płaszczyzny środkowej modelu.

W przypadkach elementów płaskich o grubościach większych, tj. porównywalnych z rozmiarami gabarytowymi w płaszczyźnie środkowej modelu oraz w szczególności z promieniami krzywizn powierzchni granicznych modelu należy wziąć pod uwagę możliwość pojawienia się stanów naprężenia o charakterze przestrzennym w obszarach w pobliżu inkluzji. Ten fakt należy uwzględniać w analizie naprężeń cieplnych w układach złożonych z części wykonanych z materiałów o różnych własnościach fizycznych.

W pracy podjęto próbę oceny wymienionych stanów naprężenia w przypadku inkluzji pierścieniowej połączonej nierozłącznie z tarczą kołową. Odpowiedni model tej inkluzji nadaje się dobrze zarówno do badań eksperymentalnych metodą termoelastooptyczną, jak i do realizacji obliczeń metodą elementów skończonych.

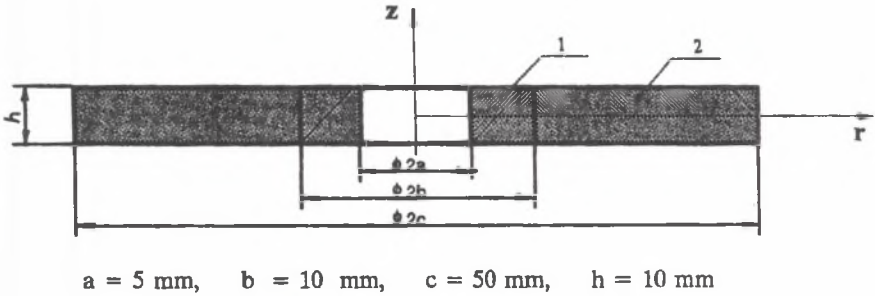
## 2. MODEL

W analizie stanu odkształcenia i naprężenia rozpatrywanego przypadku modelu osiowo-symetrycznego układu inkluzji pierścieniowej w tarczy kołowej przyjęto układ współrzędnych walcowych  $r, \varphi, z$ , w którym oś  $z$  pokrywała się z osią symetrii modelu. Na rys.1 przedstawiono przekrój osiowy modelu składającego się z tarczy kołowej 2 i inkluzji pierścieniowej 1 wraz z zaznaczonymi rozmiarami ogólnymi. Charakterystyki własności mechanicznych i cieplnych zastosowanych materiałów modelowych przedstawiono w tabl.1.

Tablica 1  
Charakterystyki własności mechanicznych i cieplnych materiałów modelowych

Charakterystyka materiałowa	Materiał	
	MAT1 Dural	MAT2 Araldin B
Moduł sprężystości wzdłużnej $E$ [MPa]	72090	3770
Współczynnik Poissona $\nu$	0.335	0.367
Współczynnik przewodzenia ciepła $\lambda$ [W/mK]	165	0.2
Ciepło właściwe $c_p$ [J/kg K]	673	1050
Gęstość $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	2650	1200
Współczynnik rozszerzalności liniowej cieplnej $\beta$ [K <sup>-1</sup> ]	0.0000236	0.00006

Przyjęto, że inkluzja jest nierozłącznie połączona z tarczą ściankami cylindrycznymi o promieniu  $b$ . Zakłada się również, że w początkowej temperaturze odniesienia  $T_0$  w układzie inkluzja-tarcza nie występują naprężenia.



Rys.1. Przekrój osiowy modelu  
Fig.1. Axial section of the model

Ze względu na założenie osiowej symetrii temperatura  $T_0$ , składowe przemieszczenia  $u$  i  $w$ , oraz naprężenia  $\sigma_r$ ,  $\sigma_z$  i  $\tau_{rz}$  są zależne od współrzędnych  $r$  i  $z$  oraz czasu  $\tau$ .

W rozważaniach teoretycznych przyjęto trzy warianty A, B i C modeli, które scharakteryzowano następująco:

- A - model tarczowy oparty na założeniu, że występuje w nim płaski stan naprężenia określony naprężeniami  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$  ( $\sigma_z = 0$ ,  $\tau_{rz} = 0$ ),
- B - model osiowo-symetryczny znajdujący się w płaskim stanie odkształcenia ( $\varepsilon_z = 0$ ,  $\gamma_{rz} = 0$ ),
- C - model osiowo-symetryczny przestrzenny, w którym na wszystkich zewnętrznych ściankach granicznych nie ma obciążeń mechanicznych, na ściankach płaskich  $\sigma_z = 0$  i  $\tau_{rz} = 0$ , na ściankach cylindrycznych  $\sigma_r = 0$  i  $\tau_{rz} = 0$ .

Model A odpowiada przypadkowi płaskiego stanu naprężenia w cienkiej tarczy o grubości  $h \rightarrow 0$ . Model B może odpowiadać sytuacji, w której nie występują przemieszczenia  $w$  w kierunku osi  $z$ ; będzie to rura o ograniczonej swobodzie przemieszczeń przekrojów poprzecznych. Wreszcie model C jest najbardziej zbliżony do rozpatrywanego badanego modelu połączenia inkluzji z tarczą kołową o grubości  $h$ .

### 3. BADANIA DOŚWIADCZALNE

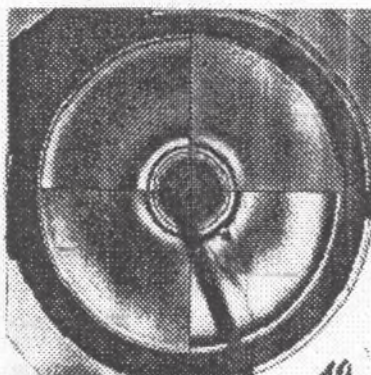
W badaniach doświadczalnych wyznaczano efekty dwójłomności wymuszonej w tarczy 2 modelu (rys.1), przy prześwietlaniu światłem spolaryzowanym w układzie optycznym specjalnego zestawu filtrów, który umożliwiał równoczesną rejestrację izochrom o rzędach całkowych i połówkowych. Model posiadał osłonę z polimetakrylanu metylu zapobiegającą wymianie ciepła płaskich ścianek modelu z otoczeniem.

Obciążenie cieplne modelu było przyłożone do wewnętrznej walcowej ścianki pierścienia za pośrednictwem grzałki zasilanej prądem elektrycznym regulowanym za

pomocą układu sterowanego komputerem.

Temperaturę w wybranych punktach modelu mierzono termoelementami oraz określano jej rozkład na powierzchni modelu metodą termowizyjną.

Pomiary ułamkowych rzędów izochrom wykonywano kompensatorem liniowym firmy Photoelastic. Podczas badania rejestrowano izochromy za pomocą kamery telewizyjnej i aparatu fotograficznego. Na rys.2 przedstawiono przykładowo układ izochrom w czasie 360s od początku obciążenia cieplnego.



Rys.2. Rozkład izochrom w modelu dla  $\tau = 360$  s  
Fig.2. Photothermoelastic stress pattern for the model  $\tau = 360$  s

#### 4. OBLICZENIA NUMERYCZNE

W analizie odkształceń i naprężeń cieplnych wykonywano obliczenia numeryczne metodą elementów skończonych (MES) zarówno dla stanów stacjonarnych, jak i niestacjonarnych. W stanie stacjonarnym przyjmowano ustalony równomierny przyrost temperatury  $\Delta T = T_k - T_0$ . W stanie niestacjonarnym zakładano na zewnętrznej cylindrycznej ściance inkluzji wymianę ciepła zgodnie z warunkiem brzegowym trzeciego rodzaju przy danym współczynniku przyjmowania ciepła  $\alpha = 100 \text{ W/m}^2\text{K}$ , określonym uprzednio doświadczalnie. Dla pozostałych ścianek modelu przyjęto warunek doskonałej izolacji ( $\alpha = 0$ ). Jako warunek początkowy przyjęto, że w chwili początkowej  $\tau_0$  w każdym punkcie modelu występuje stała temperatura początkowa  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  i nie ma naprężeń ani odkształceń wstępnych. Przyjęto ponadto  $T_k = 50^\circ\text{C}$ . W obliczeniach stosowano programy dla płaskiego stanu naprężenia odpowiadające tarczowemu modelowi A oraz programy dla osiowo-symetrycznego zagadnienia przestrzennego dla modeli w wariantach B i C.

## 5. ANALIZA WYNIKÓW BADAŃ

W celu porównawczej oceny wyników uzyskanych metodą elementów skończonych oraz badań doświadczalnych wykorzystano zależności oparte na związkach wynikających z teorii sprężystości odpowiednio przystosowanych do rozpatrywanego tu problemu osiowo-symetrycznego.

Dla modelu wersji A przyjęto, że model składa się z dwóch cienkich pierścieni 1 i 2, z których pierścień 1 posiada promienie  $a$  i  $b$ , a pierścień 2 - promienie  $b$  i  $c$ .

Na podstawie rozwiązania zagadnienia Lamego można uzyskać dla równomiernej zmiany temperatury  $\Delta T$  wzór na naprężenie normalne  $\sigma$ , występujące na granicy połączenia pierścieni:

$$\sigma = \frac{E_1(\beta_2 - \beta_1)\Delta T}{\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} - \nu_1 + \frac{E_1(b^2 + c^2)}{E_2(c^2 - b^2) + \nu_2}}, \quad (1)$$

gdzie:  $E_1, E_2$  - moduły sprężystości wzdłużnej odpowiednio materiałów pierścienia 1 (MAT1) i tarczy 2 (MAT2),

$\nu_1, \nu_2$  - współczynniki Poissona,

$\beta_1, \beta_2$  - współczynniki rozszerzalności liniowej.

Znając  $\sigma$  można obliczyć naprężenia promieniowe  $\sigma_r$  i obwodowe  $\sigma_t$  odpowiednio ze wzorów:

$$\sigma_r = \frac{b^2 \sigma}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \quad \sigma_t = \frac{b^2 \sigma}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \quad (2)$$

w pierścieniu 1,

$$\sigma_r = \frac{b^2 \sigma}{c^2 - b^2} \left(1 - \frac{c^2}{r^2}\right), \quad \sigma_t = \frac{b^2 \sigma}{c^2 - b^2} \left(1 + \frac{c^2}{r^2}\right) \quad (3)$$

w tarczy 2.

W celu wykorzystania wzorów (1), (2) i (3) do analizy płaskiego stanu odkształcenia występującego w modelu B należy we wzorze (1) w miejsce występujących

tam stałych materiałowych podstawić: zamiast  $E_i$  wyrażenie  $\frac{E_i}{1 - \nu_i^2}$ , zamiast  $\nu_i$  -

wyrażenie  $\frac{\nu_i}{1 - \nu_i}$  oraz zamiast  $\beta_i$  wyrażenie  $\beta_i(1 - \nu_i)$ , gdzie  $i = 1, 2$ . Następnie



naprężenia normalne  $\sigma_{ii}$  i  $\sigma_{ii}$  obliczamy odpowiednio ze wzorów (2) i (3), podstawiając w nich wyznaczone naprężenie  $\sigma$  oraz  $\sigma_r = \sigma_{ii}$  i  $\sigma_t = \sigma_{ii}$ .

Naprężenie osiowe  $\sigma_{zi}$  wyznaczamy z zależności:

$$\sigma_{zi} = \nu_i(\sigma_{zi} + \sigma_{ii}) - E_i \beta_i \Delta T \quad (4)$$

dla  $i = 1, 2$  odpowiednio w pierścieniu 1 i tarczy 2.

W typowych badaniach doświadczalnych płaskiego stanu naprężenia metodą elastoptyczną wykorzystuje się prześwietlanie na wskroś modelu płaskiego. Wyznaczony w badaniach tych rząd izochromy  $m$  określa różnicę naprężeń głównych zgodnie ze wzorem:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{K_\sigma}{h} m, \quad (5)$$

gdzie:  $K_\sigma$  - elastoptyczna stała materiałowa,

$h$  - grubość modelu,

$\sigma_1, \sigma_2$  - naprężenia normalne główne.

Wzór (5) dotyczy przypadku równomiernego rozkładu naprężeń wzdłuż grubości modelu.

W badaniach termoelastoptycznych w przypadku zmieniających się wzdłuż grubości modelu naprężeń względne przesunięcie fazowe spolaryzowanych składowych promieni przechodzących przez model równa się sumie przesunięć wywołanych przez stan naprężenia w poszczególnych warstewkach modelu.

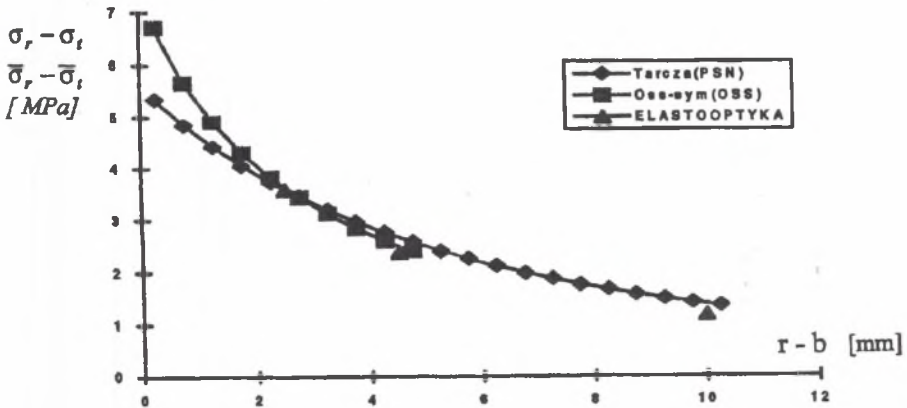
Przy założeniu, że w poszczególnych punktach leżących na przechodzącym przez model wzdłuż prostej równoległej do osi z promieniu światła monochromatycznego kierunki wtórnych naprężeń głównych  $\sigma_1'$  w  $\sigma_2'$  punktach modelu nie zmieniają się, można wyrazić wartość  $m$  rzędu izochromy wzorem:

$$m = \frac{1}{K_\sigma} \int_0^b (\sigma_1' - \sigma_2') dz \quad (6)$$

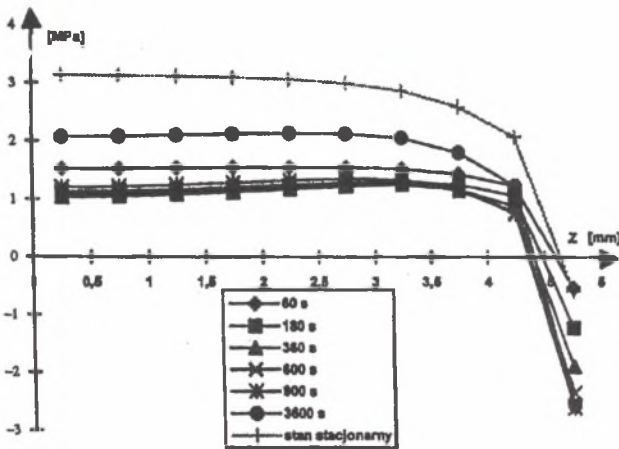
W interpretacji wyników pomiarów elastoptycznych można zastosować zależność (5) przy założeniu, że wartości  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  odpowiadają średnim wartościom  $\bar{\sigma}_1$  i  $\bar{\sigma}_2$  naprężeń normalnych głównych, wyznaczonym wzdłuż normalnej do powierzchni modelu, tj.:  $\sigma_1 = \bar{\sigma}_1$  i  $\sigma_2 = \bar{\sigma}_2$ .

Na rys.3 przedstawiono wykresy funkcji  $\sigma_1 - \sigma_2$  i  $\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2$  obliczonych odpowiednio dla wariantów A i C modeli teoretycznych oraz zaznaczono kółkami wartości uzyskane na podstawie pomiarów elastoptycznych.

Na rys.4 przedstawiono wykresy zależności  $\sigma_1$  od  $z$  przy granicy połączenia tarczy z inkluzją (patrz. rys.1) dla różnych czasów  $\tau$  d początku obciążenia cieplnego oraz dla stanu stacjonarnego odpowiadającego  $\Delta T = 30^\circ\text{C}$ .



Rys.3. Wykresy  $(\sigma_1 - \sigma_2)$  i  $(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)$  w funkcji  $(r - b)$  odpowiednio dla wariantu A i C oraz wyniki badań elastoptycznych  
 Fig.3. Curves of  $(\sigma_1 - \sigma_2)$  and  $(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)$  as the functions of  $(r - b)$  and photothermoelastic results



Rys.4. Rozkłady naprężeń  $\sigma_r(\tau)$  w funkcji z  
 Fig.4. Distributions of stresses  $\sigma_r(\tau)$  as the function of z

## 6. WNIOSKI

Przeprowadzone badania naprężeń ciepłych w modelach połączenia inkluzji pierścieniowej z tarczą kołową wskazują na wystąpienie koncentracji naprężeń na granicy połączenia. W szczególności w przekroju środkowym ( $z=0$ ) modelu C naprężenia  $\sigma_z$  osiągają znaczne wartości.

Badania doświadczalne naprężeń metodą elastoptyczną dają wyniki zgodne z

obliczeniami numerycznymi dla modelu C i wyjaśniają fakt lokalnego wpływu połączenia pierścienia inkluzji i tarczy ze względu na różnice współczynników rozszerzalności cieplnej materiałów tych elementów. W obszarze połączenia występuje przestrzenny stan naprężenia, który należy uwzględnić przy interpretacji wyników badań termoelelastoptycznych.

Wyznaczone w tym obszarze wartości rzędów izochrom określają średnią wartość bezwzględną różnicy naprężeń  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , które zmieniają się wzdłuż grubości modelu. W pewnej odległości od granicy połączenia inkluzji z tarczą przestrzenny stan naprężenia zanika i stan naprężenia można traktować jako płaski.

#### LITERATURA

- [1] Orłoś Z., Cudny W., Tomaszewski K.: Modelowe badania stanu naprężenia w połączeniach elementów konstrukcyjnych o różnych własnościach fizycznych. Inż. Materiałowa, 3, 1991
- [2] Galin G., Orłoś Z.: Influence of the rectangular parallelepiped inclusion on transient thermal stresses, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, No. 1, vol. 31, 1993
- [3] Orłoś Z. i inni: Naprężenia cieplne. PWN, Warszawa 1991

Recenzent: prof. dr hab. inż. W. Nowacki

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1994 r.