Seria: MECHANIKA z. 121

Nr kol. 1266

Lukasz GRELA Elektrownia Laziska Ryszard A. BIAŁECKI Instytut Techniki Cieplnej Politechnika Śląska

PROMIENIOWANIE CIEPŁA W MEDIUM ROZPRASZAJĄCYM; RÓWNANIA CAŁKOWE I KONCEPCJA ICH DYSKRETYZACJI

<u>Streszczenie</u>. W artykule wyprowadzono równania całkowe promieniowania ciepła w trójwymiarowym ośrodku absorbujący, emitującym i rozpraszającym promieniowanie cieplne. Ośrodek jest otoczony nieizotermicznymi ściankami. Pole temperatury ośrodka może być dowolne. W odróżnieniu od sformułowań klasycznych wyprowadzone równania nie zawierają całek objętościowych. Analizę przeprowadzono dla ciał szarych, pokazano uogólnienie na przypadek ośrodka i ścian nieszarych. Zaproponowano sposób dyskretyzacji uzyskanych równań z wykorzystaniem metody elementów brzegowych.

HEAT RADIATION IN SCATTERING MEDIA; INTEGRAL EQUATION AND A CONCEPTION OF THEIR DISCRETIZATION

Summary. Integral equations governing 3D heat radiation in absorbing, emitting and scattering medium are derived. The medium is bounded by nonisothermal, gray walls of arbitrary temperature. The temperature distribution within the medium is also arbitrary. As opposed to classic formulations, the equations do not contain volume integrals. The analysis concerns the case of gray, isotropically scattering medium. The extension to more realistic case of nongray, anisotropically scattering medium is proposed. A method of discretization of the derived equations is described. The technique is based on the boundary element method i.e. local interpolation and nodal collocation.

WÄRMESTRAHLUNG IN ABSORBIERENDEN, EMITTIERENDEN UND ZERSTREUENDEN MEDIUM; INTEGRALGLEICHUNGEN UND KONZEPT DEREN DISKRETISIERUNG

Zusammenfassung. Integralgleichungen der Wärmestrahlung in einem absorbierenden, emittierenden und zerstreuenden Medium wurden hergeleitet. Das Medium ist umgeben von nichtisothermischen, grauen Wänden. Die Temperatur des Mediums ist beliebig. Diese Gleichungen, in Gegensatz zu den klassischen Formulierungen, enthalten keine Volumenintegrale. Die Analyse wurde auf den Fall der isotropen Zerstreuung und eines grauen Mediums beschrenkt. Eine Erweiterungung aus nicht graue Körper und anisotrope Zerstreuung wurde gezeigt. Eine Methode der Diskretisierung der Integralgleichungen wurde vorgeschlagen. Diese Technik beruht auf der Randelementmethode d.h. lokaler Interpolation und Knotenkollokation.

1. WSTĘP

Transport ciepła w komorach spalania, piecach przemysłowych itp. odbywa się głównie poprzez promieniowanie. Powstała bryła spalin może być, w przypadku paliw gazowych i ciekłych, traktowana jak ośrodek absorbująco-emitujący. Obecność cząsteczek ciał stałych w spalinach powstałych w wyniku spalania paliw stałych powoduje, że w modelu transportu promieniowania należy dodatkowo uwzględnić rozpraszanie.

Metody rozwiązywania zadań promieniowania w ośrodkach nierozpraszających są stosunkowo dobrze poznane. Najbardziej efektywne metody rozwiązywania takich zadań należą do grupy technik strefowych. Techniki te mogą być, jak pokazano w [1], interpretowane jako różne warianty metody ważonych reszt. Metody te nie były dotąd stosowane do zagadnień promieniowania w obecności rozpraszania. Niniejsza praca jest próbą rozszerzenia metody elementów brzegowych, należącej do grupy metod strefowych, na przypadek medium, które nie tylko absorbuje i emituje energię radiacyjną, ale także ją rozprasza.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

W celu uproszczenia terminologii zakłada się, że ośrodek, w którym następuje transport energii radiacyjnej jest bryłą gazową otoczoną nieprzeźroczystymi ściankami. Zadanie rozwiązuje się przy następujących założeniach:

- ośrodek znajduje się w równowadze termodynamicznej;
- ściany otaczające promieniującą brylę gazową emitują i odbijają promieniowanie w sposób dyfuzyjny i mogą być traktowane jak ciało szare. Rozkład temperatury ścianek jest dowolny, lecz znany;
- bryła gazowa jest ośrodkiem szarym. Gaz emituje, absorbuje i rozprasza energię radiacyjną. Rozpraszanie ma charakter izotropowy. Rozkład temperatury w bryle jest dowolny, lecz znany.

Poszukuje się rozkładu radiacyjnych strumieni ciepła na ściankach otaczających bryłę gazową oraz rozkładu radiacyjnych źródeł ciepła w bryle gazowej.

3. RÓWNANIE TRANSPORTU PROMIENIOWANIA

Równanie transportu promieniowania wzdłuż biegu promienia poruszającego się od punktu \mathbf{r} do punktu \mathbf{p} ma postać [2]:

$$\frac{\mathrm{d}I^{i}(\mathbf{p},\Omega)}{\mathrm{d}L_{rp}(\mathbf{p})} = a(\mathbf{p})\{I_{b}[T^{m}(\mathbf{p})] - I^{i}(\mathbf{p},\Omega)\} + \sigma_{s}(\mathbf{p})I^{i}(\mathbf{p},\Omega) + \frac{\sigma_{s}(\mathbf{p})}{4\pi} \int_{(4\pi)} \Phi(\Omega,\Omega')I^{i}(\mathbf{p},\Omega')\mathrm{d}\Omega'$$
(1)

gdzie: $I'(\mathbf{p}, \Omega)$ – intensywność promieniowania w punkcie p, dopływającego z kierunku Ω (linia łącząca punkty r i p), p – bieżący punkt, a – współczynnik absorpcji promieniowania, d L_{rp} – różniczkowa długość drogi promienia biegnącego od punktu r do punktu p, I_b – intensywność promieniowania ciała doskonale czarnego, T^m – temperatura medium, σ_s – współczynnik rozpraszania, d Ω' – elementarny kąt bryłowy. Φ – funkcja fazowa. Dla założonego izotropowego rozpraszania $\Phi = 1$. Całkowanie w ostatnim członie wzoru (1) obejmuje pełny kąt bryłowy. Równanie (1) może być scałkowane formalnie wzdłuż biegu promienia, co daje intensywność promieniowania padającego na punkt pzkierunku Ω

$$I^{i}(\mathbf{p},\Omega) = I^{o}(\mathbf{r},\Omega)\tau(\mathbf{r},\mathbf{p}) + \int_{0}^{L_{rp}} R(\mathbf{r}')k(\mathbf{r}')\tau(\mathbf{r}',\mathbf{p})dL_{rp}(\mathbf{r}'), \qquad (2)$$

gdzie: $I^{\circ}(\mathbf{r}, \Omega)$ – intensywność promieniowania wysyłanego z punktu **r** w kierunku Ω , k – współczynnik ekstynkcji $k = a + \sigma_s$, całkowanie w ostatnim członie wzoru (2) przebiega wzdłuż biegu promienia od punktu **r** do punktu **p**. τ i R oznaczają odpowiednio transmisyjność i funkcję źródła. Funkcje te zdefiniowane są jako:

$$\tau(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \exp\left[-\int_0^{L_{rp}} k(\mathbf{r}') \mathrm{d}L_{rp}(\mathbf{r}')\right]$$
(3)

$$R(\mathbf{r}') = \frac{a(\mathbf{r}')}{k(\mathbf{r}')} I_b[T^m(\mathbf{r}')] + \frac{\sigma_s(\mathbf{r}')}{4\pi k(\mathbf{r}')} \int_{(4\pi)} I^i(\mathbf{r}', \Omega') \mathrm{d}\Omega'$$
(4)

Dla ścian szarych, emitujących i odbijających promieniowanie w sposób dyfuzyjny, intensywność promieniowania wysyłanego z punktu r w kierunku Ω można wyrazić jako

$$I^{o}(\mathbf{r},\Omega) = \frac{1}{\pi} \left\{ e_{b}[T(\mathbf{r})] + \frac{1-\epsilon(\mathbf{r})}{\epsilon(\mathbf{r})}q^{r}(\mathbf{r}) \right\},$$
(5)

gdzie: q^r – radiacyjny strumień ciepła (gęstość strumienia energii radiacyjnej absorbowanej netto przez elementarną powierzchnię ścianki), e_b – gęstość emisji ciała doskonale czarnego, ϵ – emisyjność ścianki, T – temperatura ścianki.

Równania bilansu energii radiacyjnej zapisanego dla elementarnej powierzchni ścianki otaczającej brylę gazową ma postać:

$$q^{r}(\mathbf{p}) = \epsilon(\mathbf{p}) \int_{(2\pi)} \{ I^{i}(\mathbf{p}, \Omega) - I_{b}[T(\mathbf{p})] \} \cos \phi_{p} d\Omega,$$
(6)

gdzie: ϕ_p , kąt pomiędzy kierunkiem promienia padającego na punkt **p** a normalną w tym punkcie. Całkowanie obejmuje kąt bryłowy 2π .

Elementarny kąt brylowy d Ω wyraża się poprzez elementarną powierzchnię ścianki dSjako

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\cos\phi_{\tau}\mathrm{d}S(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{p}|^2},\tag{7}$$

gdzie $|\mathbf{r} - \mathbf{p}|$ oznacza odległość pomiędzy punktami **r** i **p**, zaś ϕ_r jest kątem zawartym pomiędzy kierunkiem promienia opuszczającego punkt **r** a normalną w tym punkcie.

Po wykorzystaniu dyfuzyjnego charakteru promieniowania emitowanego z punktu p i uwzględnieniu równań (2,5,7) równanie bilansu (6) przekształca się do postaci:

$$q^{r}(\mathbf{p}) + \epsilon(\mathbf{p})e_{b}[T(\mathbf{p})] = \epsilon(\mathbf{p})\int_{S}\left\{e_{b}[T(\mathbf{r})] + \frac{1-\epsilon(\mathbf{r})}{\epsilon(\mathbf{r})}q^{r}(\mathbf{r})\right\}\tau(\mathbf{r},\mathbf{p})K(\mathbf{r},\mathbf{p})dS(\mathbf{r}) + \pi\epsilon(\mathbf{p})\int_{S}\left[\int_{0}^{L_{rp}}R(\mathbf{r}')k(\mathbf{r}')\tau(\mathbf{r}',\mathbf{p})dL_{rp}(\mathbf{r}')\right]K(\mathbf{r},\mathbf{p})dS(\mathbf{r}), (8)$$

gdzie przez K oznaczono znaną funkcję geometrii

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\cos \phi_r \cos \phi_p}{\pi |\mathbf{r} - \mathbf{p}|^2}$$
(9)

Jeśli znane są własności materiałowe $(a, k, \sigma_s, \epsilon)$ oraz temperatura ścianki i medium, zależność (8) jest równaniem całkowym o dwóch niewiadomych funkcjach: q^r i R. Rozkład radiacyjnego strumienia ciepła q^r poszukiwany jest tylko na ściankach otaczających bryłę gazową. Przebieg funkcji źródła R poszukiwany jest w całym wnętrzu bryły. Dodatkowe równanie zamykające układ równań powstaje z równania (4), definiującego funkcję źródła. Po uwzględnieniu zależności (2,5,7) i wykorzystaniu izotropii promieniowania emitowanego z punktu r otrzymuje się:

$$R(\mathbf{p}) = \frac{a(\mathbf{p})}{\pi k(\mathbf{p})} e_b[T^m(\mathbf{p})] + \frac{\sigma_s(\mathbf{p})}{4\pi k(\mathbf{p})} \int_S \left\{ e_b[T(\mathbf{r})] + \frac{1 - \epsilon(\mathbf{r})}{\epsilon(\mathbf{r})} q^r(\mathbf{r}) \right\} \tau(\mathbf{r}, \mathbf{p}) K_r(\mathbf{r}, \mathbf{p}) dS(\mathbf{r}) + \frac{\sigma_s(\mathbf{p})}{4k(\mathbf{p})} \int_S \left[\int_0^{L_{rp}} R(\mathbf{r}') k(\mathbf{r}') \tau(\mathbf{r}', \mathbf{p}) dL_{rp}(\mathbf{r}') \right] K_r(\mathbf{r}, \mathbf{p}) dS(\mathbf{r}),$$
(10)

gdzie

$$K_r(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\cos \phi_r}{\pi |\mathbf{r} - \mathbf{p}|} \tag{11}$$

Rozwiązanie równań (8) i (10) daje rozkłady: radiacyjnego strumienia ciepła na ściankach oraz funkcji źródła w całej objętości ośrodka. Znajomość tych funkcji pozwala z kolei wyznaczyć wielkość zwaną radiacyjnym źródłem ciepła i zdefiniowaną jako ilość energii radiacyjnej absorbowanej netto przez jednostkową objętość gazu. Wielkość ta, oznaczana przez q_v^r , występuje w równaniach konwekcyjnego transportu energii w gazie, gdzie pełni rolę członu źródłowego. Wyznaczenie wartości q_v^r jest więc niezbędne, jeśli pole temperatury wewnątrz bryły nie jest znane z pomiarów. Wielkość radiacyjnego źródła ciepła wyznacza się z bilansu elementarnej objętości bryły gazowej.

$$q_{v}^{r}(\mathbf{p}) = a(\mathbf{p}) \int_{(4\pi)} \left\{ I^{i}(\mathbf{p}, \Omega) - I_{b}[T^{m}(\mathbf{p})] \right\} d\Omega$$
(12)

Postępując podobnie jak w przypadku wyprowadzenia równania (10), otrzymuje się zależność

$$q_{v}^{r}(\mathbf{p}) + 4a(\mathbf{p})e_{b}[T^{m}(\mathbf{p})] = a(\mathbf{p})\int_{S}\left\{e_{b}[T(\mathbf{r})] + \frac{1-\epsilon(\mathbf{r})}{\epsilon(\mathbf{r})}q^{r}(\mathbf{r})\right\}\tau(\mathbf{r},\mathbf{p})K_{r}(\mathbf{r},\mathbf{p})dS(\mathbf{r}) + \pi a(\mathbf{p})\int_{S}\left[\int_{0}^{L_{rp}}R(\mathbf{r}')k(\mathbf{r}')\tau(\mathbf{r}',\mathbf{p})dL_{rp}(\mathbf{r}')\right]K_{r}(\mathbf{r},\mathbf{p})dS(\mathbf{r})$$
(13)

W odróżnieniu od równań całkowych (8) i (10), które są uwiklane ze względu na niewiadome funkcje q^r i R, równanie (13) jest jawne ze względu na poszukiwaną wydajność radiacyjnych źródeł ciepła q_v^r .

Należy podkreślić, że uzyskane w pracy równania, w odróżnieniu od klasycznych sformułowań, nie zawierają całek objętościowych pochodzących od promieniowania ośrodka. Całki objętościowe udalo się zastąpić całkami powierzchniowymi z całek wzdłuż biegu promienia. Ta z pozoru niewielka zmiana pociąga za sobą poważne konsekwencje na etapie dyskretyzacji równań całkowych, co zostanie bliżej omówione w następnym punkcie.

4. DYSKRETYZACJA

Proponowana technika dyskretyzacji równań całkowych (8),(10),(13) polega na użyciu metody elementów brzegowych. Technika ta potwierdziła swoją efektywność przy rozwiązywaniu zadań promieniowania w ośrodkach emitująco-absorbujących [1].

Pierwszym krokiem metody jest podział całego brzegu obszaru na rozłączne podobszary (elementy brzegowe). W każdym elemencie obiera się węzły, w których będą poszukiwane wartości niewiadomych funkcji. Wewnątrz elementów aproksymuje się, za pomocą funkcji kształtu, rozkłady: emisji ciała doskonale czarnego e_b oraz radiacyjnego strumienia ciepła q^r . Podobnie jak w metodzie elementów skończonych, funkcje te są stowarzyszonymi z węzłami danego elementu wielomianami niskich rzędów, znikającymi poza danym elementem. Wewnątrz elementu funkcja kształtu przyjmuje wartości 1, w węźle z którym jest stowarzyszona, natomiast zeruje się we wszystkich pozostałych węzłach elementu. Podobne funkcje kształtu używane są do aproksymacji kształtu każdego z elementów. Pozwala to na rzutowanie elementów na kwadrat lub trójkąt jednostkowy.

Dyskretyzacja równań (8),(10),(13) wymaga, oprócz wyznaczenia całek po powierzchni ścian otaczających bryłę gazu, obliczenia dwu typów całek wzdłuż linii biegu promienia. Całki te wyznaczyć można w sposób półanalityczny. Proponowana procedura wymaga podziału całego obszaru na elementy objętościowe (elementy skończone). Podział ten może być niezależny od podziału powierzchni ścian. Przy założeniu stałości temperatury, funkcji źródła i właściwości materiałowych wewnątrz każdego z elementów objętościowych, odpowiednie całki wyrażają się jako:

$$\tau(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \exp\left[-\int_0^{L_{\tau p}} k(\mathbf{r}') \mathrm{d}L_{\tau p}(\mathbf{r}')\right] = \exp\left[-\sum_{i=1}^N k_i d_i\right]$$
(14)

$$\int_{0}^{L_{rp}} R(\mathbf{r}')k(\mathbf{r}')\tau(\mathbf{r}',\mathbf{p})dL_{rp}(\mathbf{r}') = \sum_{i=1}^{N} R_{i}\exp\left[-\sum_{j=i+1}^{n} k_{j}d_{j}\right] \left[1-\exp(-k_{i}d_{i})\right], (15)$$

gdzie: k_i – współczynnik ekstynkcji w *i*-tej komórce objętościowej, R_i – wartość funkcji źródła w tej komórce, d_i – długość drogi promienia wewnątrz *i*-tej komórki, N – liczba komórek, które przecina promień biegnący z punktu r do p.

Jak łatwo zauważyć, dla wyliczenia całek liniowych wystarczy znać długości d_i . Szczególnie łatwo jest wyznaczyć te wielkości w przypadku, gdy podziału bryły gazowej na elementy objętościowe dokonuje się poprzez poprowadzenie płaszczyzn równoległych do osi układu współrzędnych ortokartezjańskich. W tym przypadku można skorzystać z algorytmu opracowanego dla ośrodka emitująco - absorbującego [1].

Finalny układ równań algebraicznych otrzymuje się stosując metodę kollokacji w węzłach, na których opiera się aproksymacja funkcji e_b i q^r [równanie (8)] oraz aproksymacja funkcji R i q_v^r [równania (10) i (12)].

Dyskretyzacja równań (8),(10),(13) prowadzi do trzech układów równań algebraicznych:

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_{b}(T) + \mathbf{B}\mathbf{q}^{r} + \mathbf{C}\mathbf{R} = 0 \tag{16}$$

$$\mathbf{De}_{b}(T) + \mathbf{Ee}_{b}(T^{m}) + \mathbf{Fq}^{r} + \mathbf{GR} = 0$$
(17)

$$\mathbf{q}_{u}^{r} + \mathbf{H}\mathbf{e}_{b}(T) + \mathbf{I}\mathbf{e}_{b}(T^{m}) + \mathbf{J}\mathbf{q}^{r} + \mathbf{K}\mathbf{R} = 0,$$
(18)

gdzie wektory $\mathbf{e}_b(T), \mathbf{e}_b(T^m), \mathbf{q}^r, \mathbf{R}, \mathbf{q}^r_v$ zawierają wartości węzłowe odpowiednio: emisji ciała czarnego o temperaturze ścianki, emisji ciała czarnego o temperaturze gazu, radiacyj-

nego strumienia ciepła na ściance, funkcji źródła i radiacyjnego źródła ciepła. Równania (16,17, 18) stanowią zdyskretyzowane wersje równań odpowiednio: (8,10,13).

Macierze **A,B,D,F,H,J** są wynikiem promieniowania ścian. Aby wyznaczyć współczynniki tych macierzy należy numerycznie obliczyć całki powierzchniowe po elementach brzegowych. Obliczenie funkcji podcałkowej wymaga w tym przypadku obliczenia jąder (9) lub (11) oraz całek liniowych (14). Wymaga to śledzenia pewnej liczby promieni biegnących między węzłem kollokacji a punktami węzłowymi kwadratur.

Macierze C, E, G, I, K wynikają z promieniowania bryły gazowej, przy czym macierze E, I są diagonalne i ich obliczenie jest trywialne. Macierze C, G, K są macierzami pełnymi. W klasycznym sformułowaniu obliczane są one poprzez dyskretyzację całek objętościowych, co jest procedurą o rząd wielkości bardziej czasochłonną niż dyskretyzacja całek powierzchniowych.

Zaproponowane wersje równań całkowych pozwalają na zastąpienie całkowania po objętości całkowaniem po powierzchni ścian. Obliczenie funkcji podcałkowej wymaga przy tym wyznaczenia wartości jąder (9) lub (11) oraz całek liniowych (15). Korzystną cechą zaproponowanej procedury dyskretyzacji jest fakt, że współczynniki macierzy C,G,K wyznacza się poprzez śledzenie tych samych promieni, które są śledzone przy obliczaniu macierzy A,B,D,F,H,J. Oznacza to, że współczynnki macierzy C,G,K otrzymuje się praktycznie "za darmo". Ponieważ w sformułowaniu klasycznym obliczanie współczynników tych macierzy pochłania najwięcej czasu, korzyść z zaproponowanej metody rozwiązywania jest oczywista.

Lączne rozwiązanie równań (16) i (17) daje nieznane wartości radiacyjnych strumieni ciepła w węzłach położonych na brzegu obszaru oraz wartości funkcji źródła w punktach wewnątrz obszaru. Znając powyższe wielkości, łatwo z równania (18) obliczyć wartości radiacyjnych źródeł ciepła.

Współczynniki układów równań (16-18) obliczane są za pomocą kwadratur Gaussa. Jak pokazuje doświadczenie, klasyczna postać kwadratur Gaussa daje wyniki obarczone znacznym błędem. Problem ten znalazł rozwiązanie stosunkowo niedawno [1], kiedy to udalo się przenieść na grunt promieniowania metode całkowania numerycznego opracowaną dla metody elementów brzegowych. Opisana technika całkowania numerycznego polega na użyciu oszacowania błędu kwadratury do sterowania rozmieszczeniem punktów Gaussa wewnatrz danego elementu brzegowego, przekształconego w kwadrat jednostkowy. Analiza numeryczna pokazuje, że błąd kwadratury jest funkcją dwu zmiennych: minimalnej odległości punktu kollokacji od danego elementu i rzedu kwadratury Gaussa. Oszacowanie można uzyskać a priori, a punktem wyjścia jest fakt, że funkcja podcałkowa $K(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ zachowuje się asymptotycznie jak odwrotność kwadratu odległości pomiędzy punktami r i p. Do sterowania rozmieszczeniem punktów Gaussa stosuje się metodę doboru rzedu kwadratury, połaczona z podziałem obszaru całkowania na podobszary. Technikę te zaczerpnięto z klasycznej wersji metody elementów brzegowych [3] i zastosowano z sukcesem do obliczeń radiacyjnej wymiany ciepła w obecności medium przeźroczystego [4, 5] oraz absorbująco emitującego [1].

Pewne trudności pojawiają się w przypadku, gdy punkt kollokacji należy do elementu, po którym dokonuje się całkowania. Odpowiednie całki są wtedy osobliwe i nie mogą być wyznaczone poprzez zwykłe kwadratury. Sytuacja upraszcza się w przypadku, gdy rozważany element jest plaski, bowiem fizyczna interpretacja podpowiada, że odpowiednia całka musi znikać. Wynika to z faktu, że płaski element nie może opromieniowywać sam siebie. Tak jest jednak tylko w przypadku, gdy punkt kollokacji nie leży na krawędzi lub narożniku ciała. Jeśli punkt kollokacji leży w miejscu nieciągłości normalnej do brzegu obszaru, fizyczna interpretacja całki osobliwej nie może być stosowana. Trudność tę można ominąć odsuwając punkty kollokacji od krawędzi i wierzchołków, podobnie jak to się czyni w przypadku elementów niedopasowanych (*nonconforming elements*). Odpowiednia procedura została już opracowana dla potrzeb promieniowania w ośrodkach przeźroczystych [4, 5] i, niezależnie, dla klasycznych zastosowań metody elementów brzegowych. Warto wspomnieć, że procedura ta zapewnia, w odróżnieniu od klasycznej wersji techniki elementów niedopasowanych, ciągłość pola temperatury na krawędziach i w narożach.

5. MOŻLIWE ROZSZERZENIA MODELU

Przedstawione równania opisują radiacyjny transport energii w ośrodku optycznie czynnym. Przy wyprowadzaniu równań uwzględniono wszystkie mechanizmy interakcji pomiędzy medium a falą elektromagnetyczną. Słabością przedstawionego modelu jest niezbyt realistyczne założenie, że rozpatrywany ośrodek zachowuje się jak gaz szary. W rzeczywistości, na skutek efektów kwantowych, absorpcja i emisja gazu zależy w dużym stopniu od długości fali promieniowania. Gaz jest optycznie aktywny w pewnych pasmach widma, podczas gdy w pozostałych pasmach zachowuje się jak medium przeźroczyste. Innym dyskusyjnym założeniem jest przyjęcie, że rozpraszanie promieniowania ma charakter izotropowy.

5.1. Model pasmowy

Założenie o szarym charakterze promieniowania gazu łatwo jest ominąć opisując własności absorpcyjne gazu za pomocą modelu pasmowego. Model ten dzieli całe widmo promieniowania na pasma, w których gaz posiada stałe, choć różne w każdym z pasm, własności optyczne a, k, σ_s . W pozostałych przedziałach widma tzw. oknach, gaz traktuje się jak przeźroczysty. Stosowanie modelu pasmowego wymaga sformułowania i rozwiązania równań promieniowania w każdym z pasm i okien. Stosowana procedura jest analogiczna do opisanej w [1].

5.2. Anizotropia rozpraszania

Anizotropia rozpraszania objawia się zależnością funkcji fazowej Φ od kąta Ω' , pod jakim pada promień i kąta Ω promienia rozproszonego. W wyniku takiego charakteru funkcji fazowej funkcja źródła R jest nie tylko funkcją położenia \mathbf{p} , ale zależy także od kąta. Aby móc oddać zależność funkcji źródła od kąta, można zastosować technikę analogiczną do metod strumieniowych. Technika ta polega na podziale całego kąta pełnego na pewną liczbę przedziałów. W każdym z takich przedziałów kątowych zakłada się niezależność funkcji źródła od kąta. Wartość funkcji źródła w każdym z przedziałów traktuje się następnie jak niewiadomą.

Inną, jak się wydaje, bardziej elegancką metodą jest rozwinięcie funkcji źródła w szereg harmonik sferycznych i poszukiwanie współczynników tego rozwinięcia. Metoda ta ma uzasadnienie fizyczne [7]. Z teorii rozpraszania promieniowania elektromagnetycznego, opracowanej przez Mie, wynika bowiem, że funkcja fazowa może być przedstawiona jako ważona suma iloczynów harmonik sferycznych S_k kąta padania i rozpraszania.

$$\Phi(\Omega, \Omega') = \sum_{k=0}^{M} \beta S_k(\Omega') S_k(\Omega), \qquad (19)$$

gdzie β – znane współczynniki.

Nieznane współczynniki rozwinięcia funkcji źródła w harmoniki sferyczne otrzymuje się porównując współczynniki przy tych samych funkcjach sferycznych w równaniu (10).

Praca powstała w ramach grantu 3 P404 015 07 finansowanego przez Komitet Badań Naukowych.

LITERATURA

- Białecki R.A.: Solving Heat Radiation Problems Using the Boundary Element Method. Southampton and Boston: Computational Mechanics Publications, 1993
- [2] Siegel R., Howell J.A.: Thermal Radiation Heat Transfer. Wyd. 3. Washington: Hemisphere Publishing Company, 1992
- [3] Białecki R.A., Dallner R., Kuhn G.: Minimum Distance Calculation Between a Source Point and a Boundary Element. "Engineering Analysis with Boundary Elements", 12, 1994, pp. 211-218
- [4] Grela L.: Użycie aproksymacji wyższego rzędu w metodzie elementu brzegowego zastosowanej do rozwiązywania zadań promieniowania cieplnego, Praca dyplomowa, Instytut Techniki Cieplnej Politechniki Śląskiej, Gliwice 1993
- [5] Białecki R.A., Grela L.: Practical Aspects of Developing Heat Radiation BEM Code, Boundary Element Technology IX, International Conference on Boundary Element Technology BETECH 94, Orlando, Florida, (USA) C.A. Brebbia and A. Kassab (eds), Southampton and Boston: Computational Mechanics Publications, 1994, pp. 29-39
- [6] Mitra A.K., Ingber M.S.: A Multiple Node Method to Resolve the Difficulties in the Boundary Integral Equation Method Caused by Corners and Discontinuous Boundary Conditions. "International Journal for Numerical Methods in Engineering", 36, 1993, pp. 1735-1746
- [7] Tan Z.: Radiative Heat Transfer in Multidimensional Emitting, Absorbing and Scattering Media - Mathematical Formulation and Numerical Method. "Journal of Heat Transfer, Trans. ASME", 111, 1989, pp. 141-147

Recenzent: prof. dr hab. inż. Tadeusz Burczyński

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1994 r.