

Stanisław MAJEWSKI, Grzegorz WANDZIK
Katedra Inżynierii Budowlanej
Politechnika Śląska

JEDNO- I DWUOSIOWE TESTY NUMERYCZNE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEGO MODELU BETONU

Streszczenie. W pracy opisano wyniki numerycznych testów sprężysto-plastycznego modelu betonu w warunkach odpowiadających badaniom laboratoryjnym próbek betonowych przy jedno- i dwuosiowym ściskaniu i rozciąganiu.

UNIAXIAL AND BIAXIAL NUMERICAL TESTS OF ELASTO-PLASTIC MODEL OF CONCRETE

Summary. Numerical tests of elasto-plastic model of concrete corresponding to laboratory uni- and biaxial compressive and tensile tests of concrete specimens have been presented.

EIN UND ZWEIDIMENSIONALEN NUMERISCHEN TESTEN ELASTISCH- PLASTISCHES MODELL DEN BETON

Zusammenfassung. Der Ergebnisse der Numerischen Testen, Elastisch-Plastisches Modell den Beton in der Bedingungen entsprechenden untersuchungen der Laborbetonprobe unter Ein- und Zweidimensionalen Zusammendrücken und Streckbarung sind presentiert.

1. WSTĘP

Liniowo-sprężysty model materiałowy dawno już przestał być podstawą bardziej złożonych analiz z zakresu mechaniki betonu. Świadomość silnie nieliniowych efektów związanych z zarysowaniem przy rozciąganiu, charakterem zależności $\sigma-\epsilon$, trwałymi odkształceniami przy wysokich poziomach naprężenia oraz własnościami reologicznymi skłoniła wielu badaczy do opracowania modeli realistycznie opisujących zachowanie betonu pod obciążeniem. Ich charakterystykę podano między innymi w monograficznych opracowaniach [1], [2], [3].

Skomplikowany aparat matematyczny oraz niekompletna podbudowa doświadczalna najbardziej złożonych modeli ograniczają ich praktyczne zastosowania. W analizach zagadnień niezależnych od czasu dobrą reprezentację zachowania betonu zapewniają stosunkowo proste modele sprężysto-plastyczne.

W pracy [4] przedstawiono ogólny opis sprężysto-plastycznego modelu ze wzmocnieniem lub osłabieniem izotropowym dla betonu. Model ma ciągłą i gładką powierzchnię plastyczności złożoną ze stożkowej powierzchni Druckera-Pragera oraz dwóch stycznych do niej nasadek: kulistej w strefie rozciągania i elipsoidalnej w strefie dużych naprężeń ściskających. Równania poszczególnych powierzchni w przestrzeni naprężeń określonej przez naprężenie średnie σ_m zależne od pierwszego niezmiennika stanu naprężenia i "intensywność naprężenia" $\bar{\sigma}$ zależną od drugiego niezmiennika dewiatora stanu naprężenia mają postać:

- dla stożka:

$$F_1 = \bar{\sigma} + (3\alpha\sigma_m - \beta) \cdot Y(\kappa) = 0,$$

$$\alpha = \frac{f_c - f_t}{f_c + f_t} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \beta = \frac{2f_c f_t}{\sqrt{3}(f_c + f_t)}, \quad (1)$$

- dla nasadki kulistej:

$$F_2 = \bar{\sigma}^2 + \sigma_m^2 - R^2 = 0, \quad R = f_m = \frac{\beta Y_\kappa}{\sqrt{1 + 9\alpha^2 Y_\kappa^2}} \quad (2)$$

- dla nasadki elipsoidalnej:

$$F_3 = \frac{(\sigma_m - c)^2}{a^2} + \frac{\bar{\sigma}^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$b = \frac{\sqrt{3[1 + 2\gamma + \gamma^2 + 3\vartheta^2(1 - 2\gamma + \gamma^2)]}}{3(1 + \gamma)} Y_\kappa f_c, \quad c = -\left[\frac{1}{3} + \frac{\vartheta^2 Y_\kappa^2 (1 - \gamma)}{1 + \gamma} \right] f_c, \quad (3)$$

$$a = \vartheta b, \quad \gamma = \frac{f_t}{f_c}$$

Funkcję wzmocnienia/osłabienia przyjęto w postaci:

$$Y(\kappa) = C_4 + (1 - C_4)(C_2 \kappa + C_3) \exp(1 - C_3 - C_2 \kappa), \quad (4)$$

gdzie parametrem jest plastyczna część "intensywności odkształcenia"

$$\kappa = \bar{\epsilon}_p = \sqrt{\frac{1}{3} \left[(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right]} \quad (5)$$

W sprężystym stadium pracy przyjęto przyrostową postać związków konstytutywnych $d\sigma = D^* d\epsilon$. Wyrazy zmiennej w trakcie obciążenia macierzy sprężystości D^* uzależniono od dwóch parametrów: stałego modułu ściśliwości K oraz zależnego od poziomu naprężenia modułu ścinania G_p , który jest obliczany jako moduł styczny dla hiperbolicznego wykresu $\sigma - \epsilon$ z próby jednoosiowego ściskania.

W równaniach konstytutywnych modelu występuje więc 8 parametrów materiałowych:

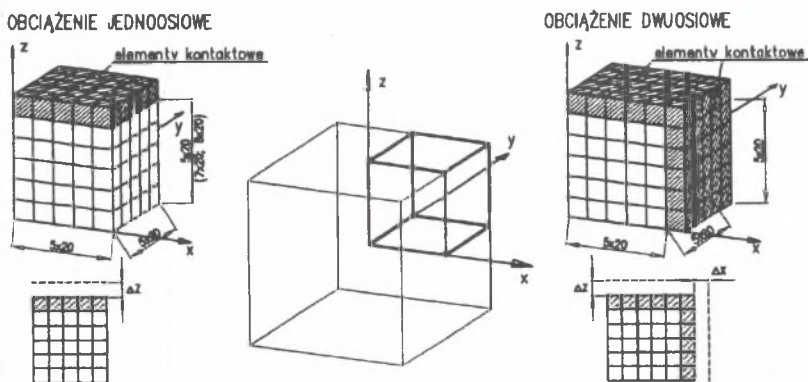
- stała f_c zależna od wytrzymałości betonu na ściskanie,
- stała f_t zależna od wytrzymałości betonu na rozciąganie,
- moduł ściśliwości K i początkowa wartość modułu ścinania G_p ,
- stosunek półosi elipsoidalnej nasadki powierzchni plastyczności ϑ ,
- trzy stałe C_2, C_3 i C_4 określające charakter wzmocnienia względnie osłabienia materiału.

Uproszczenie modelu polegające na rezygnacji z fazy wzmocnienia pozwala przyjąć $C_3 = 1$. Stała C_4 określa końcową postać powierzchni plastyczności ukształtowaną w wyniku osłabienia materiałowego. Interpretacja fizykalna nakazuje przyjąć $C_4 = 0$, jednakże ze względu na stabilność procedur numerycznych założono $C_4 = 0.1$. Te same względy zdecydowały o przyjęciu $C_2 = 1000$. Dodatkowo przyjęto stosunek półosi elipsoidalnej nasadki $\vartheta = 3.0$. Brak jest obecnie podstaw doświadczalnych do określenia tego parametru, który decyduje o zachowaniu materiału w strefie równomiernych i bardzo wysokich naprężeń ściskających.

W celu wyznaczenia pozostałych parametrów materiałowych modelu przeprowadzono badania numeryczne symulujące zachowanie kostkowych próbek betonowych przy jedno- i dwuosiowym ściskaniu i rozciąganiu.

2. OPIS BADAŃ NUMERYCZNYCH

Wszystkie badania numeryczne przeprowadzono na prostopadłościennych próbkach betonowych o kwadratowym przekroju poprzecznym o boku $b=200\text{mm}$ i trzech wysokościach $h=200\text{mm}$, 280mm i 320mm . Badaniami objęto trzy rodzaje betonu o wytrzymałościach na ściskanie 20MPa , 40MPa i 60MPa . Wartości te należy rozumieć jako wytrzymałości uzyskane w laboratoryjnej próbie jednoosiowego ściskania na sześcienniej kostce o boku 200mm . Symetria pozwala ograniczyć analizę do jednej ósmej części próbki (rys. 1).



Rys. 1. Podział na elementy, wymiary i sposób obciążenia próbek
Fig. 1. Network of finite elements, dimensions and loading of specimens

W testach numerycznych starano się wiernie zrealizować stan próbki poddanej badaniom laboratoryjnym. Dlatego jako obciążenie elementów zadawano przemieszczenia węzłów położonych na skrajnych powierzchniach, co dobrze reprezentuje docisk sztywnych głowic prasy. Przemieszczenia zadawano za pośrednictwem elementów kontaktowych o zwiększonej wytrzymałości. Zestawienie analizowanych próbek zamieszczono w tablicy 1.

Tablica 1

Zestawienie próbek poddanych badaniom numerycznym

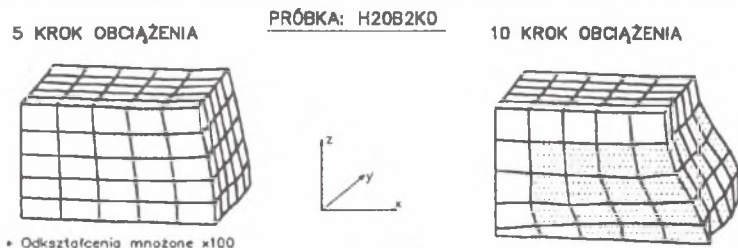
Wytrzyma- łość Rb [MPa]	Stosunek zadanych przemieszczeń $k=\Delta x/\Delta z$					
	k=0.00 (badanie jednoosiowe)			k=0.25	k=0.50	k=1.00
	wysokość próbki h [mm]			wysokość próbki h [mm]		
	200	280	320	200	200	200
20	h20b2k0	-	-	-	-	-
40	h20b4k0	h28b4k0	h32b4k0	h20b4k025	h20b4k050	h20b4k100
60	h20b6k0	-	-	-	-	-

Analizy numeryczne próbek zestawionych w tablicy 1 przeprowadzono wielokrotnie, zmieniając parametry materiałowe f_o , f_t , K , G , oraz C_2 . Poszukiwano takich wartości tych parametrów, przy których wynik testu numerycznego będzie najlepiej pokrywał się z wynikiem badania laboratoryjnego analogicznej próbki.

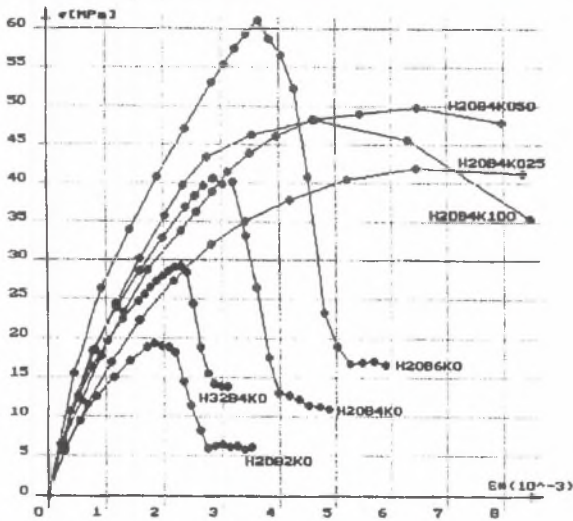
3. WYNIKI BADAŃ NUMERYCZNYCH

Przystępując do omówienia wyników testów trzeba zaznaczyć, że przyjęte w tytule i powszechnie stosowane w omówieniu badań laboratoryjnych określenia "jednoosiowe" i "dwuosio-we" są ściśle jedynie w odniesieniu do sposobu realizacji obciążenia, nie dotyczą natomiast stanu naprężenia w badanych próbkach, który w każdym przypadku jest stanem trójosiowym. Jedno- względnie dwuosiowy stan naprężenia można zrealizować jedynie przy zerowym tarcu w płaszczyźnie styku próbki z głowicami prasy, co w praktyce jest nieosiągalne.

Na rysunku 2 przedstawiono charakterystyczny dla wszystkich badanych próbek obraz deformacji w dwóch fazach obciążenia. W fazie drugiej, odpowiadającej zniszczeniu próbki, zaznaczono te elementy, w których ścieżki naprężeń przebiły powierzchnię plastyczności.



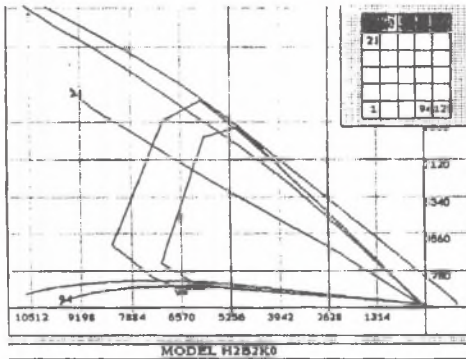
Rys.2. Deformacja siatki węzłów w początkowym i końcowym stadium obciążenia
Fig.2. Deformation of nodal grid in the initial and final load stadium



Rys. 3. Wykresy zależności naprężenie-odkształcenie
Fig. 3. Stress-strain diagrams

Wykresy zależności $\sigma_1 - \epsilon_2$ uzyskane z testów numerycznych (rys.3) dobrze reprezentują wyniki badań laboratoryjnych. Zauważa się zbliżony do liniowego kształt wykresu dla obciążenia dwuosioowego. Zgodnie z oczekiwaniem dla próbek wyższych uzyskano wyraźne obniżenie poziomu naprężeń niszczących. Znaczne zwiększenie tych naprężeń otrzymano natomiast dla obciążenia dwuosioowego.

Jak już zaznaczono, stan naprężenia w jedno- i dwuosioowo obciążonej próbce jest *de facto* stanem trójosiowym na skutek kotwiącego wpływu sztywnych głowic prasy. Warto w tym miejscu również zaznaczyć, że rozkład naprężeń normalnych σ_x w przekroju poprzecznym jednoosiowo obciążonej próbki wcale nie jest równomierny. Wynika to ze zróżnicowania cech decydujących o podatności materiału w wyniku niejednakowego poziomu jego wyczerpania. Ta nierównomierność naprężeń jest praktycznie niezauważalna w początkowej fazie obciążenia i staje się bardzo wyraźna bezpośrednio przed zniszczeniem. Przykładowo dla próbki h20b4k0



Rys. 4. Ścieżki naprężeń
Fig. 4. Stress paths

stosunek maksymalnych do minimalnych naprężeń normalnych σ_x wyniósł 1.14 w pierwszym kroku obciążenia, 1.63 w kroku ósmym i aż 2.22 w kroku dziewiątym (zniszczenie próbki).

W modelu sprężysto-plastycznym z izotropowym osłabieniem (bez wzmocnienia) objawem zniszczenia materiału jest przebiecie powierzchni plastyczności przez ścieżkę naprężeń. Odształcenia wynikające z dalszego wzrostu obciążenia

nia mają wyłącznie charakter odkształceń plastycznych. Ich narastanie powoduje osłabienie materiału i "kurczenie się" powierzchni plastyczności w przestrzeni naprężeń. Ilustruje to

rysunek 4, na którym przedstawiono przykładowe ścieżki naprężeń oraz początkowe i końcowe położenia powierzchni plastyczności dla wybranych elementów próbki h20b2k0.

W tablicy 2 dla wszystkich badanych numerycznie próbek zestawiono średnie wartości wytrzymałości na ściskanie i rozciąganie, początkowe moduły sprężystości oraz odkształcenia ε_c odpowiadające wytrzymałości na ściskanie.

Tablica 2

Zestawienie wyników badań numerycznych

Cecha	Oznaczenie próbki							
	h20b2k0	h20b4k0	h20b6k0	h28b4k0	h32b4k0	h20b4k025	h20b4k050	h20b4k100
\bar{R}_c [Mpa]	19.35	40.61	61.09	32.97	29.17	41.86	49.84	48.13
\bar{E}_t [Mpa]	20230	28239	34114	28072	28022	29012	30105	33679
ε_c ‰	19	30	36	25	24	63	65	47
\bar{R}_t [Mpa]	1.43	2.25	2.92	-	-	-	-	1.64

Zestawione w tablicy 2 cechy wykazują dobrą zgodność z własnościami określonymi doświadczalnie. Cechy te uzyskano przy następujących parametrach modelu:

- stałe "wytrzymałościowe" $f_{c0} = (0.80 - 0.001\bar{R})\bar{R}$, $f_{t0} = (0.23 - 0.0005f_{c0})\sqrt{f_{c0}^2}$,
- moduł ścisłości $K = 2789\sqrt{(0.80 - 0.001\bar{R})\bar{R}}$, i ścinania $G_t = 2092\sqrt{(0.80 - 0.001\bar{R})\bar{R}}$,

4. WNIOSKI

Przeprowadzone testy numeryczne jedno- i dwuosiowo obciążonych próbek pozwoliły określić parametry sprężysto-plastycznego modelu betonu zaproponowanego w pracy [4]. Uzyskano dobrą zgodność wyników analizy numerycznej z wynikami badań laboratoryjnych próbek. Przydatność modelu została również potwierdzona w analizach złożonych elementów żelbetowych [5]. Celowe są dalsze prace nad doskonaleniem modelu, który może stać się sprawnym narzędziem do analiz konstrukcji betonowych i żelbetowych.

LITERATURA

- [1] Chen W.F.: Plasticity in Reinforced Concrete. McGraw-Hill, New York, 1982
- [2] Nilson A.H. (Chairman) et al.: State-of-the-Art Report on Finite Elements Analysis of Reinforced Concrete. American Society of Civil Engineers, 1982
- [3] Godycki-Ćwirko T.: Mechanika betonu, Arkady, 1982
- [4] Majewski S.: Sprężysto-Plastyczny model betonu. Materiały XL Konferencji Naukowej KIL PAN i KN PZITB w Krynicy, tom 3, 1994
- [5] Szojda L., Wandzik G.: Numeryczna analiza zachowania żelbetowych ram portalowych. Materiały XL Konferencji Naukowej KIL PAN i KN PZITB w Krynicy, tom 3, 1994

Recenzent: prof. dr hab. inż. W. Gutkowski

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1994 r.