ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995

Seria: MECHANIKA z. 121 Nr kol. 1266

Jerzy ŚWIDER
Katedra Mechaniki Robotów i Maszyn
Politechnika Śląska

MODELOWANIE DRGAŃ UKŁADU ROZRZĄDU POJAZDU METODĄ MACIERZOWYCH GRAFÓW HYBRYDOWYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono sposób odwzorowania zdyskretyzowanego modelu fenomenologicznego mechanizmu rozrządu pojazdu w macierzowy graf hybrydowy (mgh). Dokonano algebraizacji tego grafu i zapisano formuły wyznaczania równań ruchu modelu oraz jego zespolonych charakterystyk dynamicznych.

MODELLING OF VIBRATION OF CAMSHAFT DRIVE SYSTEM BY MEANS OF MATRIX HYBRID GRAPHS

Summary. In this paper a method of the transformation of a discrete mechanical model of a camshaft drive system into the matrix hybrid graph (mhg) has been presented. The algebraic expression of the equations of motion of the system and the algebraical expressions of the dynamical characteristics of the camshaft drive system have been worked out.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНОГО МЕХАНИЗМА ПОЕЗДА МЕТОДОМ MGH

Резюме. В работе представлено способ воспроизвестения дискретного феноменогичного моделя распределительного механизма в матричный кубридовный граф (mgh). Получено альгебраизацию этого графа и условия определения уравнений движения моделя.

1. WPROWADZENIE

W pracach [1,2] przedstawiono podstawy formalne i algorytmy postępowania przy modelowaniu drgań układów mechanicznych metodą macierzowych grafów hybrydowych (mgh). Metoda ta służy do badania drgań zdyskretyzowanych, płaskich i przestrzennych modeli układów,

poddanych wzbudzeniom kinematycznym i dynamicznym. Umożliwia ona zarówno symboliczne generowanie różniczkowych równań ruchu, jak i wyznaczanie wszystkich możliwych charakterystyk dynamicznych układu.

Tok postępowania w przypadku zastosowania metody mgh wymaga:

1. Ponumerowania w kolejności: n elementów inercyjnych (od 1 do n), k wymuszeń kinematycznych (od n+1 do n+k), m elementów sprężysto - tłumieniowych (od n+k+1 do n+k+m) i w wymuszeń dynamicznych (od n+k+m+1 do n+k+m+w),
2. Odwzorowania elementów inercyjnych $\{E\}$ w bierne krawędzie $\{{}_2X\}$ mgh, czyli:

$$f(E_i) = {}_2x_i, \quad \text{gdzie } E_i \in \{E\}, \quad {}_2x_i \in \{{}_2X\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

3. Odwzorowania wymuszeń kinematycznych $\{E\}$ w czynne krawędzie $\{{}_2X\}$ mgh, czyli:

$$f(E_i) = {}_2x_i, \quad \text{gdzie } E_i \in \{E\}, \quad {}_2x_i \in \{{}_2X\}, \quad i = n+1, n+2, \ldots, n+k,$$

4. Odwzorowania elementów sprężysto - tłumieniowych $\{E\}$ w bierne cięciwy $\{{}_2X\}$ mgh, czyli:

$$f(E_i) = {}_2x_i, \quad \text{gdzie } E_i \in \{E\}, \quad {}_2x_i \in \{{}_2X\}, \quad i = n+k+1, n+k+2, \ldots, n+k+m,$$

5. Odwzorowania wymuszeń dynamicznych $\{E\}$ w czynne cięciwy $\{{}_2X\}$ mgh, czyli:

$$f(E_i) = {}_2x_i, \quad \text{gdzie } E_i \in \{E\}, \quad {}_2x_i \in \{{}_2X\}, \quad i = n+k+m+1, n+k+m+2, \ldots, n+k+m+w,$$

6. Odzorowania relacji incydencji elementów układu $\langle E_i, E_j \rangle$ w krawędzie sprzężenia ${}_{22}x_i \in \{{}_2X\}$ mgh, czyli:

$$f(\langle E_i, E_j \rangle) = {}_{22}x_{ji},$$

gdzie:

$E_i, E_j \in \{E\}$, ${}_{22}x_i \in \{{}_2X\}$, $\langle {}_1x_j, {}_{22}x_{ji}, {}_1x_{ij} \rangle \in {}_3X$,

$\langle E_i, E_j \rangle$ - jest elementem relacji incydencji fizykalnych elementów modelu,

${}_3X$ - zbiór relacji incydencji mgh,

$i = n+k+1, \ldots, n+k+m, \ldots, n+k+m+w,$

$j = 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, n+k,$

7. Obciążenia mgh parametrami fizykalnymi i geometrycznymi modelu układu,

8. Zalgebraizowania mgh na podstawie definicji zasady macierzowych konturów sprzężonych i macierzowych odcięć sprzężonych, czyli:

$${}_1\overset{0}{S}_l + \sum_k {}_1\underset{0}{S}_k T_{kl} = 0,$$

$$ {}_{2}\underset{0}{S}_{k} + \sum_{1} {}_{2}\overset{0}{S}_{i}\, T_{ik} = 0, $$

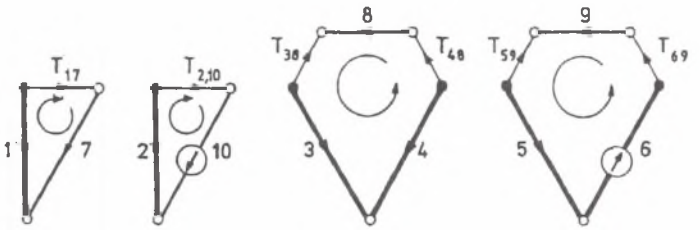
gdzie:

$k = 1,2,\ldots,n$ - indeksy gałęzi drzewa $\{\underset{0}{X}\}$ mgh, incydentnych przez krawędzie sprzężenia k,i z cięciwą i,

$i = n+1, n+2,\ldots,n+m$ - indeksy cięciw przeciwdrzewa $\{\overset{0}{X}\}$ mgh,

9. Utworzenia analitycznych formuł poszukiwanych rozwiązań.

W pracach [1,2] wykazano, że mgh zdyskretyzowanego modelu układu mechanicznego może zawierać tylko cztery rodzaje niezależnych, macierzowych konturów sprzężonych, jak to pokazano na rys.1.



Rys.1. Niezależne, macierzowe kontury sprzężone mgh

Fig.1. Independent matrix coupled outlines of the matrix hybrid graph

Na rys.1 oznaczono przez:

1,2,3,4,5 - krawędzie mgh, reprezentujące elementy inercyjne modelu układu mechanicznego,

6 - krawędź mgh, reprezentującą wzbudzenie kinematyczne modelu układu mechanicznego,

7,8,9 - krawędzie mgh, reprezentujące elementy sprężysto - tłumieniowe modelu układu,

10 - krawędź mgh, reprezentującą wzbudzenie dynamiczne modelu układu mechanicznego,

$T_{1,7}, T_{2,10}, T_{3,8}, T_{4,8}, T_{5,9}, T_{6,9}$ - wagi krawędzi sprzężenia mgh.

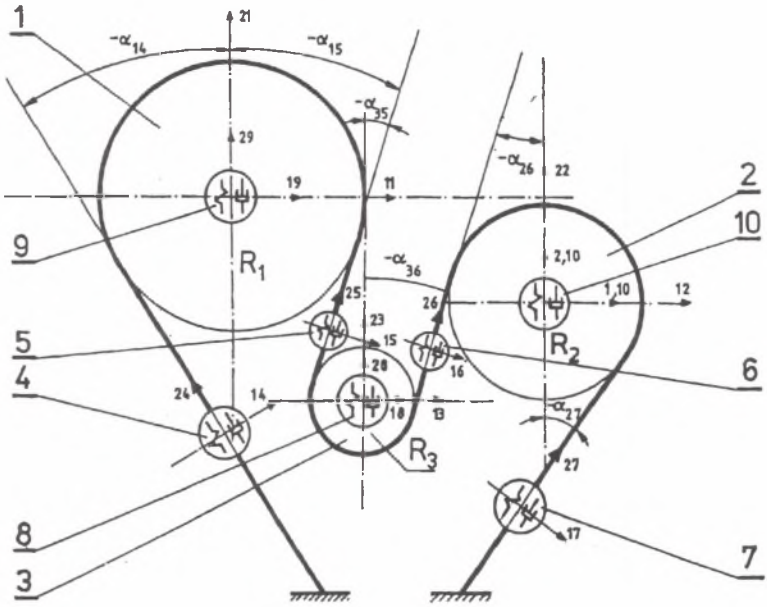
Utworzenie zbioru niezależnych konturów sprzężonych, generowanych przez cięciwy i nałożenie na siebie elementów grafu o identycznych numerach, prowadzi do utworzenia pełnego mgh

modelu układu mechanicznego. Tak otrzymany mgh, po jego zalgebraizowaniu, dostarcza macierzowych formuł, reprezentujących równania ruchu, jak również charakterystyki dynamiczne układu.

2. MACIERZOWY GRAF HYBRYDOWY UKŁADU ROZRZĄDU POJAZDU

Zagadnienie analizy dynamicznej układów rozrządu pojazdów mechanicznych jest ważnym problemem praktycznym [3].

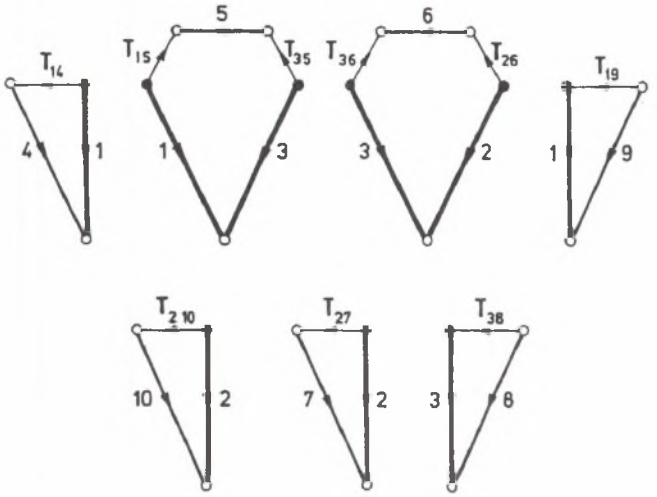
Przedmiotem zainteresowań niniejszej pracy jest układ rozrządu pojazdu, którego model fenomenologiczny pokazano na rys. 2.



Rys. 2. Przyjęty do analizy model fenomenologiczny mechanizmu rozrządu pojazdu

Fig.2. Phenomenological model of the camshaft drive system, chosen for analysis

Postępując zgodnie z algorytmem tworzenia mgh dokonano odwzorowań elementów modelu w elementy grafu i przyporządkowano uzyskanemu mgh parametry fizykalne i geometryczne modelu. Uzyskany w ten sposób zbiór niezależnych, macierzowych konturów sprzężonych mgh pokazano na rys. 3.



Rys. 3. Zbiór niezależnych, macierzowych konturów sprzężonych mgh

Fig.3. Set of independent matrix coupled outlines of the matrix hybrid graph

Macierze, generowane przez utworzony zbiór konturów mgh (rys. 3) mają następującą postać:

$_{11}S = [x_1 \quad y_1 \quad \varphi_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad \varphi_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad \varphi_3]$ - macierz współrzędnych uogólnionych układu,

$_{10}W(p) = \mathrm{diag}\left[\frac{1}{m_i p^2}, \frac{1}{m_i p^2}, \frac{1}{J_i p^2}\right]$, $(i = 1,2,3)$ - macierz podatności dynamicznych gałęzi mgh,

$W(p) = \mathrm{diag}[(c_{i1}, b_{i1} p), (c_{i2}, b_{i2} p), (c_{i\varphi}, b_{i\varphi} p),]$, $(i = 4,5,\ldots,10)$ - macierz sztywności dynamicznych cięciw mgh,

$W(p) = \mathrm{diag}[m_i p^2, m_i p^2, J_i p^2, (c_{j1}, b_{j1} p), (c_{j2}, b_{j2} p), (c_{j\varphi}, b_{j\varphi} p),]$, $(i = 1,2,3;\ j = 4,5,\ldots,10)$ - macierz sztywności dynamicznych układu,

$$_{18}B = \begin{bmatrix} T_{1,4} & -T_{1,5} & 0 & 0 & 0 & T_{1,9} & 0 \\ 0 & 0 & T_{2,6} & T_{2,7} & 0 & 0 & T_{2,10} \\ 0 & T_{3,5} & -T_{3,6} & 0 & T_{3,8} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$ - macierz rozpływu zmiennych biegunowych w układzie,

$$_{2}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_{1,4} & -T_{1,5} & 0 & 0 & 0 & T_{1,9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & T_{2,6} & T_{2,7} & 0 & 0 & T_{2,10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & T_{3,5} & -T_{3,6} & 0 & T_{3,8} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$ - macierz odcięć sprzężonych mgh,

gdzie poszczególne symbole oznaczają:

m_i - masę koła i, (i=1,2,3),

J_i - moment bezwładności koła i, (i=1,2,3),

c_j - sztywność zastępczą elementu j, (j=4,5,...,9),

b_j - zastępcze tłumienie wiskotyczne elementu j, (j=4,5,...,9),

$T_{i,j}$ - macierz sprzężenia elementu odwzorowanego gałęzią drzewa i z elementem odwzorowanym cięciwą j.

Należy zauważyć, że macierze $T_{i,j}$ stanowią iloczyny odpowiednich macierzy translacji i macierzy obrotu i mają w tym przypadku postać:

$$\mathbf{T}_{1,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ R_1 \sin\alpha_{1,4} & -R_1 \cos\alpha_{1,4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha_{1,4} & \sin\alpha_{1,4} & 0 \\ -\sin\alpha_{1,4} & \cos\alpha_{1,4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{1,5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ R_1 \sin\alpha_{1,5} & R_1 \cos\alpha_{1,5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha_{1,5} & -\sin\alpha_{1,5} & 0 \\ \sin\alpha_{1,5} & \cos\alpha_{1,5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{2,6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -R_2 \sin\alpha_{2,6} & -R_2 \cos\alpha_{2,6} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha_{2,6} & -\sin\alpha_{2,6} & 0 \\ \sin\alpha_{2,6} & \cos\alpha_{2,6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{2,7} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ R_2 \sin\alpha_{2,7} & R_2 \cos\alpha_{2,7} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha_{2,7} & -\sin\alpha_{2,7} & 0 \\ \sin\alpha_{2,7} & \cos\alpha_{2,7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{3,5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -R_3 \sin\alpha_{3,5} & -R_3 \cos\alpha_{3,5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha_{3,5} & -\sin\alpha_{3,5} & 0 \\ \sin\alpha_{3,5} & \cos\alpha_{3,5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{3,6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ R_2 \sin\alpha_{3,6} & R_2 \cos\alpha_{3,6} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha_{3,6} & -\sin\alpha_{3,6} & 0 \\ \sin\alpha_{3,6} & \cos\alpha_{3,6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_{1,9} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{2,10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{3,8} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tak utworzone macierze, opisujące mgh układu rozrządu pojazdu stanowią wystarczającą podstawę do wyznaczenia równań ruchu układu oraz jego charakterystyk dynamicznych.

3. WYZNACZANIE RÓWNAŃ RUCHU ORAZ CHARAKTERYSTYK DYNAMICZNYCH UKŁADU ROZRZĄDU

Zgodnie z formułą wyprowadzoną w pracy [1], układ równań ruchu modelu układu rozrządu z rys. 1 ma następującą postać:

$$\left[{}_{11}S\right]\left[{}_{2}B\ W(p)\ {}_{2}B^{T}\right] = 0,$$

czyli:

$${}_{11}S = \left[x_1\ \ y_1\ \ j_1\ \ x_2\ \ y_2\ \ j_2\ \ x_3\ \ y_3\ \ j_3\right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_{1,4} & -T_{1,5} & 0 & 0 & 0 & T_{1,9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & T_{2,6} & T_{2,7} & 0 & 0 & T_{2,10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & T_{3,5} & -T_{3,6} & 0 & T_{3,8} & 0 & 0 \end{bmatrix} *$$

$$*\mathrm{diag}\left[m_i p^2, m_i p^2, J_i p^2, (c_{j1}, b_{j1} p), (c_{j2}, b_{j2} p), (c_{j\varphi}, b_{j\varphi} p),\right]*$$

$$* \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_{1,4} & -T_{1,5} & 0 & 0 & 0 & T_{1,9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & T_{2,6} & T_{2,7} & 0 & 0 & T_{2,10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & T_{3,5} & -T_{3,6} & 0 & T_{3,8} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{T} = 0.$$

Jego charakterystyki dynamiczne można wyznaczyć natomiast za pomocą wyrażeń:

$$Y_1 = {}_{1s}B\left[1 + \overset{0}{W}(p)\ {}_{1s}B^{T}\ \underset{1\ 0}{W}(p)\ {}_{1s}B\right]^{-1},$$

$$Y_2 = {}_{1s}B\ \overset{0}{W}(p)\left[1 + {}_{1s}B^{T}\ \underset{1\ 0}{W}(p)\ {}_{1s}B\ \overset{0}{W}(p)\right]^{-1},$$

$$Y_2 = {}_{1s}B\ \overset{0}{W}(p)\left[1 + {}_{1s}B^{T}\ \underset{1\ 0}{W}(p)\ {}_{1s}B\ \overset{0}{W}(p)\right]^{-1},$$

$$Y_3 = -{}_{1s}B\ \overset{0}{W}(p)\ {}_{1s}B^{T}\left[1 + \underset{1\ 0}{W}(p)\ {}_{1s}B\ \overset{0}{W}(p)\ {}_{1s}B^{T}\right]^{-1},$$

$$Y_4 = -{}_{1s}B\ \overset{0}{W}(p)\ {}_{1s}B^{T}\ \underset{1\ 0}{W}(p)\left[1 + {}_{1s}B\ \overset{0}{W}(p)\ {}_{1s}B^{T}\ \underset{1\ 0}{W}(p)\right]^{-1},$$

$$Y_5 = -{}_{1s}B^T\left[1 + {}_{1}\underset{0}{W}(p)\,{}_{1s}B\,\overset{0}{W}(p)\,{}_{1s}B^T\right]^{-1},$$

$$Y_6 = -{}_{1s}B^T\,{}_{1}\underset{0}{W}(p)\left[1 + {}_{1s}B\,\overset{0}{W}(p)\,{}_{1s}B^T\,{}_{1}\underset{0}{W}(p)\right]^{-1},$$

$$Y_7 = -{}_{1s}B^T\,{}_{1}\underset{0}{W}(p)\,{}_{1s}B\left[1 + \overset{0}{W}(p)\,{}_{1s}B^T\,{}_{1}\underset{0}{W}(p)\,{}_{1s}B\right]^{-1},$$

$$Y_8 = -{}_{1s}B^T\,{}_{1}\underset{0}{W}(p)\,{}_{1s}B\,\overset{0}{W}(p)\left[1 + {}_{1s}B^T\,{}_{1}\underset{0}{W}(p)\,{}_{1s}B\,\overset{0}{W}(p)\right]^{-1},$$

gdzie znaczenia użytych macierzy są takie, jak to przedstawiono w p.2.

4. PODSUMOWANIE

Przestawiony w pracy sposób modelowania i opisu układu rozrządu pojazdu stanowi pierwszy etap przygotowania zadania do obliczeń numerycznych. Dysponując pakietem programów do symbolicznego generowania równań ruchu oraz wyznaczania charakterystyk dynamicznych układów mechanicznych metodą mgh można na tej podstawie uzyskać poszukiwane zbiory rozwiązań w odniesieniu do konkretnego obiektu układu rozrządu pojazdu.

LITERATURA

[1] Świder J.: Macierzowe grafy hybrydowe w opisie złożonych, drgających układów mechanicznych, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Zeszyt 106, Gliwice 1991,

[2] Świder J.: Matrix Hybrid Graphs as Models of Complex Vibrating Mechanical Systems, Mechanism and Machine Theory, USA (w druku),

[3] Renicke-Murmann J., Kreuter P.: Analysis and Development of Camshaft Drive Systems Using a Computer Simulation Model, FEV Motorentechnik, Aachen, Germany.

Recenzent: prof. dr hab. inż. B. Mochnacki

Wpłynęło do redakcji w grudniu 1994 r.