

Jerzy WARMIŃSKI, Kazimierz SZABELSKI
Katedra Mechaniki Stosowanej
Politechnika Lubelska

DRGANIA NIELINIOWEGO UKŁADU PARAMETRYCZNO- - SAMOWZBUDNEGO W OBSZARZE REZONANSU KOMBINOWANEGO

Streszczenie. W pracy zbadano efekty wzajemnego oddziaływania drgań samowzbudnych i parametrycznych nieliniowego układu parametryczno-samowzbudnego o dwóch stopniach swobody w obszarze rezonansu kombinowanego. Wyznaczono amplitudy i częstotliwości drgań układu. Badania analityczne przeprowadzono przy założeniach upraszczających, a uzyskane wyniki zweryfikowano i uzupełniono wynikami symulacji cyfrowej.

VIBRATIONS OF NON-LINEAR PARAMETRIC-SELF-EXCITED SYSTEM IN THE AREA OF COMBINED RESONANCE

Summary. In this paper effects of interaction between self-excited and parametric vibrations of non-linear parametric-self-excited system with two degree of freedom in combined resonance area were examined. Amplitudes and frequencies of system were calculated. Analytical research was carried out with simplified assumptions and obtained results were verified and completed with digital simulation results.

КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ АВТОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ОКРЕСНОСТИ КОМБИНИРОВАННОГО РЕЗОНАНСА

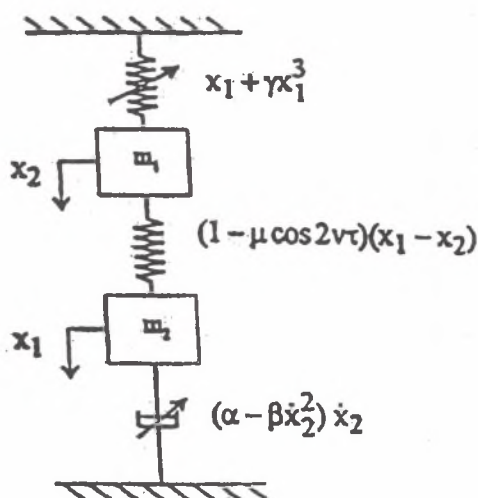
Резюме. В работе рассмотрено эффекты взаимодействия автоколебаний и параметрического возбуждения в нелинейной системе при двух степенях свободы в окрестности комбинированного резонанса. Определены амплитуды и частоты колебаний системы. Аналитические результаты получены с использованием упрощенных методов. Правильность результатов аналитических исследований обеспечено применением цифровой симуляции.

1. WSTĘP

W zagadnieniach drgań mechanicznych wyodrębnić można układy o zmiennych okresowo parametrach z jednoczesną możliwością generowania drgań samowzbudnych [1 ÷ 3]. Cechą charakterystyczną oddziaływania tego typu drgań jest zanikanie drgań samowzbudnych dla pewnych określonych warunków. Większość prac zajmujących się tymi problemami dotyczy głównie układów o jednym stopniu swobody w otoczeniu prostych rezonansów parametrycznych. W tej pracy zdecydowano się na zbadanie drgań układu o dwóch stopniach swobody w obszarze rezonansu kombinowanego.

2. MODEL MATEMATYCZNY. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE RUCHU

Weźmy pod uwagę układ parametryczno-samowzbudny o dwóch stopniach swobody z nieliniową symetryczną charakterystyką sprężystości (rys. 1). Załóżmy, że w układzie występuje wymuszenie parametryczne typu Mathie'u oraz nieliniowe tłumienie opisane modelem Rayleigha.



Rys. 1. Model fizyczny układu parametryczno-samowzbudnego
Fig. 1. Physical model of parametrically-self-excited system

Równania różniczkowe ruchu układu w postaci bezwymiarowej są następujące:

$$\ddot{x}_1 + \lambda(1 - \mu \cos 2\theta \tau) (x_1 - x_2) + x_1 + \gamma x_1^3 = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{x}_2 - (\alpha - \beta x_2^2) \dot{x}_2 - \lambda M(1 - \mu \cos 2\theta \tau) (x_1 - x_2) = 0$$

Przyjmijmy, że współczynniki α , β , γ występujące w równaniu (1) są małe i dodatnie. Równanie (1) sprowadzamy do współrzędnych quasi-normalnych y_1 , y_2

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + p_1^2 y_1 = & \mu \left\{ -\delta_1 p_1^2 \cos 2\theta \tau (e_1 y_2 - e_2 y_1) - \bar{\gamma} (\Psi_1 y_2 - \Psi_2 y_1)^3 + \right. \\ & \left. + \delta_1 \varphi (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) [\bar{\alpha} - \bar{\beta} \varphi^2 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2] \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2 + p_2^2 y_2 = & \mu \left\{ -\delta_2 p_2^2 \cos 2\theta \tau (e_1 y_2 - e_2 y_1) - \bar{\gamma} (\Psi_1 y_2 - \Psi_2 y_1)^3 + \right. \\ & \left. + \delta_2 \varphi (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) [\bar{\alpha} - \bar{\beta} \varphi^2 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2] \right\} \end{aligned}$$

gdzie:

$$\delta_1 = \frac{1 + \lambda - p_1^2}{\lambda M}, \quad \delta_2 = \frac{1 + \lambda - p_2^2}{\lambda M}; \quad \Psi_1 = \frac{\delta_1}{\delta_1 - \delta_2}; \quad \Psi_2 = \frac{\delta_2}{\delta_1 - \delta_2}$$

$$\varphi = \frac{1}{\delta_1 - \delta_2}; \quad e_1 = \Psi_1 + \varphi; \quad e_2 = \Psi_2 + \varphi$$

a częstości drgań własnych układu liniowego wynoszą

$$P_{1,2}^2 = \frac{1}{2} [1 + \lambda + M\lambda \pm \sqrt{(1 + \lambda + M\lambda)^2 - 4M\lambda}]$$

zależności pomiędzy współrzędnymi uogólnionymi a quasi-normalnymi są następujące:

$$y_1 = x_1 + \delta_1 x_2; \quad y_2 = x_1 + \delta_2 x_2.$$

3. DRGANIA OKRESOWE W OBSZARZE REZONANSU KOMBINOWANEGO

Drgania układu zbadamy w obszarze rezonansu kombinowanego w otoczeniu częstości

$$\bar{\omega} = \frac{P_2 + P_1}{2}$$

Na podstawie pracy [4] rozwiązania równania (2) przewidujemy w postaci:

$$\begin{aligned} y_1 &= B_1(\tau) \cos \omega_1 \tau + B_2(\tau) \sin \omega_1 \tau \\ y_2 &= B_3(\tau) \cos \omega_2 \tau + B_4(\tau) \sin \omega_2 \tau \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie $B_1(\tau)$, $B_2(\tau)$, $B_3(\tau)$, $B_4(\tau)$ - wolnozmiennie funkcje czasu.

Oznacza to, że każda współrzędna normalna zawiera tylko jedną składową harmoniczną, natomiast ω_1 i ω_2 są nieznanymi częstościami drgań układu. Do analizy zastosowano metodę uproszczoną, w której spełnione są tylko cztery spośród ośmiu warunków bilansu harmonicznym. Dla stanu ustalonego:

$$\frac{dB_1(\tau)}{d\tau} = 0; \quad \frac{dB_2(\tau)}{d\tau} = 0; \quad \frac{dB_3(\tau)}{d\tau} = 0; \quad \frac{dB_4(\tau)}{d\tau} = 0;$$

otrzymujemy układ algebraicznych równań nieliniowych

$$B_1 \left[p_1^2 - \omega_1^2 - \frac{3}{4} \gamma \Psi_2 (\Psi_2^2 R_1^2 + 2 \Psi_1^2 R_2^2) \right] + B_2 \left[-\alpha \varphi \delta_1 \omega_1 + \frac{3}{4} \delta_1 \beta \varphi^3 \omega_1 (\omega_1^2 R_1^2 + 2 \omega_2^2 R_2^2) \right] + \frac{1}{2} B_3 \mu \delta_1 p_1^2 \varepsilon_1 = 0 \quad (4a)$$

$$B_1 \left[\alpha \varphi \delta_1 \omega_1 - \frac{3}{4} \delta_1 \beta \varphi^3 \omega_1 (\omega_1^2 R_1^2 + 2 \omega_2^2 R_2^2) \right] + B_2 \left[p_1^2 - \omega_1^2 - \frac{3}{4} \gamma \Psi_2 (\Psi_2^2 R_1^2 + 2 \Psi_1^2 R_2^2) \right] - \frac{1}{2} B_4 \mu \delta_1 p_1^2 \varepsilon_1 = 0 \quad (4b)$$

$$-\frac{1}{2} B_1 \mu \delta_2 p_2^2 \varepsilon_2 + B_3 \left[p_2^2 - \omega_2^2 + \frac{3}{4} \gamma \Psi_1 (2 \Psi_2^2 R_1^2 + \Psi_1^2 R_2^2) \right] - B_4 \left[\alpha \varphi \delta_2 \omega_2 - \frac{3}{4} \delta_2 \beta \varphi^3 \omega_2 (\omega_2^2 R_2^2 + 2 \omega_1^2 R_1^2) \right] = 0 \quad (4c)$$

$$\frac{1}{2} \mu \delta_2 p_2^2 \varepsilon_2 B_2 + B_3 \left[-\alpha \varphi \delta_2 \omega_2 + \frac{3}{4} \delta_2 \beta \varphi^3 \omega_2 (\omega_2^2 R_2^2 + 2 \omega_1^2 R_1^2) \right] - B_4 \left[p_2^2 - \omega_2^2 + \frac{3}{4} \gamma \Psi_1 (2 \Psi_2^2 R_1^2 + \Psi_1^2 R_2^2) \right] = 0 \quad (4d)$$

$$B_1^2 + B_2^2 - R_1^2; \quad B_3^2 + B_4^2 - R_2^2$$

W równaniach (4) występuje sześć niewiadomych B_1, B_2, B_3, B_4 oraz ω_1, ω_2 . Równania te wraz z zależnością $\omega_1 + \omega_2 = 2$ nie dają jeszcze możliwości wyznaczenia nieznanymi wielkości. Dodatkowe zależności znajdujemy podnosząc równania 4a i b oraz 4c i d do kwadratu oraz dodając je stronami. Z warunku istnienia rozwiązań nietrywialnych na R_{12} i R_{22} otrzymujemy szóste równanie. Rozwiązania tego układu sześciu równań znaleziono numeryczną metodą Newtona-Raphsona.

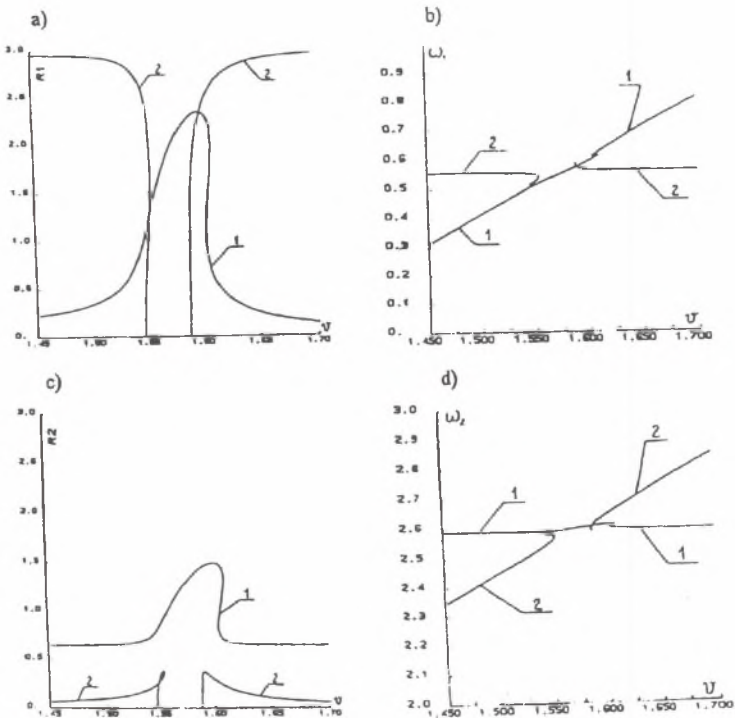
4. PRZYKŁADOWE LICZBY SYMULACYJNE BADANIA NUMERYCZNEGO. ANALIZA WYNIKÓW BADAŃ

Przykładowe obliczenia drgań układu wykonano dla następujących danych liczbowych:

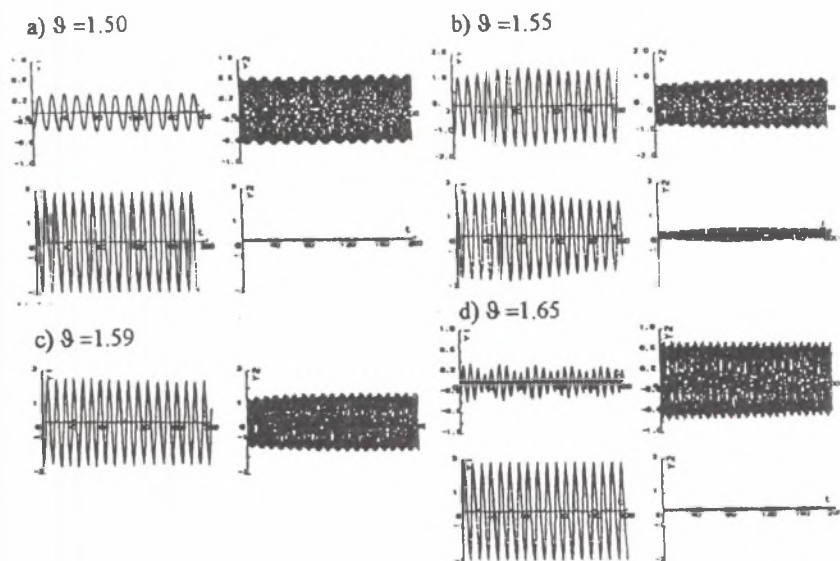
$$\alpha = 0.1, \beta = 0.05, \gamma = 0.1; \mu = 0.2; M = 0.5, \lambda = 4.$$

Częstości drgań własnych układu liniowego wynoszą $p_1 = 0.546$, $p_2 = 2.589$, natomiast $\delta_1 = 2.351$, $\delta_2 = -0.851$, $\Psi_1 = 0.734$, $\Psi_2 = -0.266$, $\epsilon_1 = 1.047$, $\epsilon_2 = 0.047$, $\varphi = 0.312$.

Analizę drgań przeprowadzono w otoczeniu częstości $(p_1 + p_2)/2 = 1.568$. Rezonans kombinowany ujawnił się zgodnie z założeniami w postaci występowania dwóch współrzędnych quasi-normalnych y_1 o częstości ω_1 (rys. 2a, b) i y_2 o częstości ω_2 (rys. 2 c, d).



Rys. 2. Amplitudy i częstości drgań układu; badania analityczne
Fig. 2. Vibrations amplitudes and frequencies; analytical research



Rys. 3. Przebiegi czasowe drgań, badania numeryczne (RKG)
 Fig. 3. Vibrations time course, numeric research (RKG)

W zakresie częstości $\vartheta \approx 1.45 \div 1.54$ otrzymujemy rozwiązania 1 lub 2 w zależności do zadanych warunków początkowych. Gdy amplituda ustala się na poziomie 2, wówczas zdecydowanie dominuje współrzędna y_1 , a y_2 osiąga wartości znacznie mniejsze. Dla częstości $\vartheta \approx 1.55 \div 1.58$ możliwy jest tylko jeden rodzaj rozwiązania (krzywa 1), natomiast gdy $\vartheta \approx 1.58 \div 1.70$ amplituda może zmieniać się według krzywej 1 lub 2.

Przeprowadzone badania wykazują występowanie w obszarze rezonansu kombinowanego dwóch możliwych stanów drgań oznaczonych na rys. 2. odpowiednio przez 1 i 2. Dla wartości parametru $\vartheta = 1.5$, $\vartheta = 1.55$, $\vartheta = 1.59$, $\vartheta = 1.65$ sporządzono przebiegi czasowe drgań we współrzędnych quasi-normalnych otrzymane z symulacji numerycznej metodą RKG (rys. 3). Z przeprowadzonej analizy widać, że drgania układu składają się z dwu dominujących składowych o częstościach ω_1 i ω_2 . Wartości częstości i amplitudy drgań układu wyznaczone analitycznie są zgodne z wynikami symulacji cyfrowej pomimo zastosowania analitycznej metody uproszczonej.

LITERATURA

- [2] Yano S.: Analitic research on dynamic phenomena of parametrically and self-existed mechanical system. *Ingenieur-Archiv*, 57, 1987, s. 51-60.
- [2] Tondl A.: On the interaction between self-excited and parametric vibrations. Prague: National Research Institute for Machine Design. Monographs and Memoranda No 25, 1978.
- [3] Szabelski K.: The vibrations of self-excited system with parametric excitation and non-symmetric elasticity characteristic. *Mechanika teoretyczna i Stosowana* 29, 1, 1991 s, 57-81.
- [4] Szemplińska-Stupnicka W.: Uogólnienie metody bilansu harmonicznycch do wyznaczenia parametrycznych rezonansów kombinowanych. *Prace IPPT PAN* 71/1977.

Recenzent: prof. dr hab. inż. A. Olędzki

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1994 r.