

Andrzej BUCHACZ, Katarzyna ŻUREK

Katedra Automatykacji Procesów Technologicznych
i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania, Wydział Mechaniczny Technologiczny,
Politechnika Śląska, Gliwice

MODELOWANIE, ANALIZA ORAZ SYNTEZA AKTYWNYCH UKŁADÓW MECHANICZNYCH

Streszczenie. Zasadniczym celem podejmowanej pracy jest opracowanie metody poszukiwania struktury oraz parametrów, czyli syntezy strukturalnej i parametrycznej dyskretnego modelu układu mechanicznego z elementami aktywnymi, na podstawie żądanych wymagań. Wymagania te dotyczą własności dynamicznych układu, a w szczególności ich widma częstotliwości.

MODELLING, ANALYSIS AND SYNTHESIS OF ACTIVE MECHANICAL SYSTEMS

Summary. The principal aim of the research taken is to work out a method of structure and parameters searching i.e. structural and parametric synthesis of discrete model of active mechanical system on the base of desired requirements. The requirements refer to dynamic features of the system, particularly their frequency spectrum.

Wprowadzenie

Występowanie niepożądanych skutków ubocznych w działaniu maszyn może wynikać z czynników, mieszczących się w zakresie efektów procesu projektowo-konstrukcyjnego, z działań wytwórczych, jak i ze sposobu użytkowania maszyny. Uboczne skutki w działaniu maszyn są przedmiotem badań, ukierunkowanych na określenie ich wpływu na otoczenie, ze szczególnym zwróceniem uwagi na bezpośrednią i pośrednią szkodliwość omawianych efektów dla człowieka, rozpoznanie mechanizmów ich powstawania, opracowanie środków i sposobów eliminacji tych efektów lub maksymalnego zredukowania ich negatywnego oddziaływania. Świadomość szkodliwości efektów ubocznych działania maszyn skutkuje zazwyczaj wprowadzaniem odpowiednich limitów, poziomów granicznych itp., które mogą powodować określone działania konstrukcyjne (np. wyposażenie maszyny w dodatkowe elementy, takie jak filtry, tłumiki i inne), wprowadzenie określonych warunków do procesu wytwórczego, czy sformułowanie specyficznych warunków i ograniczeń możliwości

użytkowania danego środka technicznego. Konstruktorzy, wytwórcy i użytkownicy maszyn stają ponadto przed problemami przeciwdziałania niepożądanym efektom w działaniu nowo konstruowanych maszyn lub dostosowania maszyn już wytworzonych i eksploatowanych do wymagań, wynikających z aktualnej wiedzy o wywoływanych przez maszyny zagrożeniach. Wprowadzenie do zbioru kryteriów konstrukcyjnych warunku redukcji drgań w sposób zasadniczy rozszerza zakres wiedzy i umiejętności, wymaganych od projektanta i konstruktora [6].

Zastosowanie aktywnych metod eliminacji drgań umożliwia przewyższenie ograniczeń, występujących w metodach pasywnych. W pasywnej redukcji drgań występuje mała efektywność w zakresie niskich częstotliwości wymuszeń i drgań własnych. Zastosowanie układów pasywnych nie daje również zadowalających rezultatów w przypadku częstotliwości o szerokim paśmie. Niskoczęstotliwościowy charakter drgań może powodować, że stosowanie wibroizolacji pasywnej nie zapewni skutecznej redukcji drgań, a nawet może doprowadzić do wzmocnienia drgań. Dlatego w takich przypadkach zastępuje się pasywną redukcję drgań redukcją aktywną. Charakterystyczną cechą aktywnej redukcji drgań jest to, że drgania kompensuje się oddziaływaniami z dodatkowych źródeł. Aktywne układy wibroizolacji sterowane są przez wymuszenie. Zmiana sygnału może być płynna lub skokowa. W układach wykonawczych stosuje się elementy: mechaniczne, pneumatyczne, hydrauliczne, elektromagnetyczne lub elektrodynamiczne. W układach pasywnych dochodzi tylko do rozpraszania energii lub magazynowania jej okresowo. W układach aktywnych energia jest dostarczana lub absorbowana w określony sposób z dowolnych miejsc urządzenia [2,5,6].

Metody aktywnej redukcji drgań dzieli się na sterowanie lub regulację procesami drgań mechanicznych. O sterowaniu ruchem obiektu mówi się wtedy, gdy do układu doprowadza się z zewnątrz sygnał sterujący, który nie jest zależny od bieżących wartości stanu tego obiektu. Sygnał ten jest zależny od wcześniej opracowanego programu. Druga metoda polega na regulacji ruchu obiektu. Sygnał sterujący w tym przypadku jest zależny od wartości bieżącej stanu obiektu. Przy regulacji ruchu konieczne jest wprowadzenie dodatkowych elementów takich, jak: czujniki wyjścia, regulator oraz urządzenia wykonawcze [6].

Modelowanie aktywnych układów mechanicznych za pomocą grafów biegunowych

Rozważa się model fenomenologiczny dyskretnego aktywnego układu mechanicznego. Układ ten złożony jest z elementów pasywnych i aktywnych.

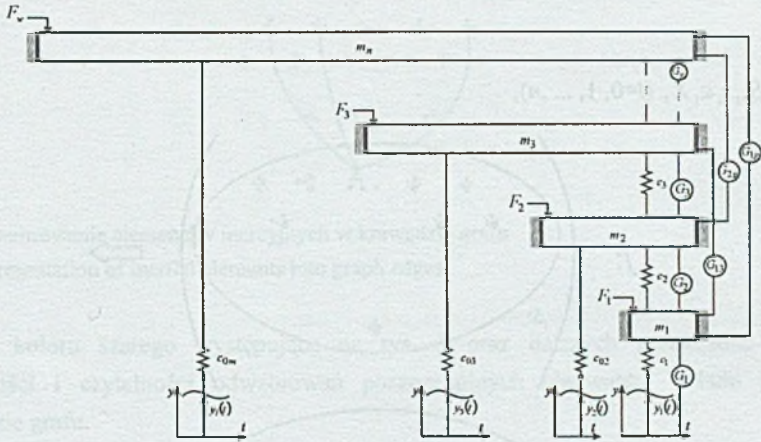
Rozpatrywany układ (rys.1) utworzono z następujących elementów:

- m → elementy inercyjne,
- c → elementy sprężyste,

- $F_K \rightarrow$ wzbudzenia kinematyczne,
- $F \rightarrow$ wzbudzenia dynamiczne,
- $G \rightarrow$ wzbudzenia aktywne.

Elementy te ponumerowano zgodnie ze schematem:

- od 1 do n - elementy inercyjne,
- od $(n+1)$ do $(n+(2m-1))$ - elementy sprężyste,
- od $(n+(2m-1))$ do $(n+(2m-1)+l)$ - wzbudzenia kinematyczne,
- od $((n+(2m-1)+l)+1)$ do $((n+(2m-1)+l)+w)$ - wzbudzenia dynamiczne,
- od $((n+(2m-1)+l)+w)+1$ do $((n+m)+l)+w+g_g$ - wzbudzenia aktywne.



Rys.1. Model aktywnego układu mechanicznego o strukturze kaskadowej

Fig.1. Model of active mechanical system of cascade structure

Do opisu przyjętego modelu dyskretnego stosuje się dwa podstawowe zbiory wielkości ${}_1S$ i ${}_2S$ oraz zbiór elementów Z ,

gdzie:

${}_1S$ – zbiór wielkości biegunowych – uogólnionych współrzędnych liniowych lub kątowych,

${}_2S$ – zbiór wielkości przepływowych – uogólnionych sił,

Z – zbiór współczynników równań biegunowych elementów drgającego układu mechanicznego, zwanych również sztywnościami dynamicznymi.

Grafem X_F struktury S dyskretnego układu mechanicznego nazywa się trójkę zbiorów w postaci:

$$X_F = [{}_1X, {}_2X, F] = [X, F], \quad (1)$$

gdzie:

$F = \{f_i\}, (i=1,2)$ odwzorowanie określone następująco:

$$F : \{S_1, S_2, S_3, S\} \rightarrow \{X, X\} \quad (2)$$

takie, że:

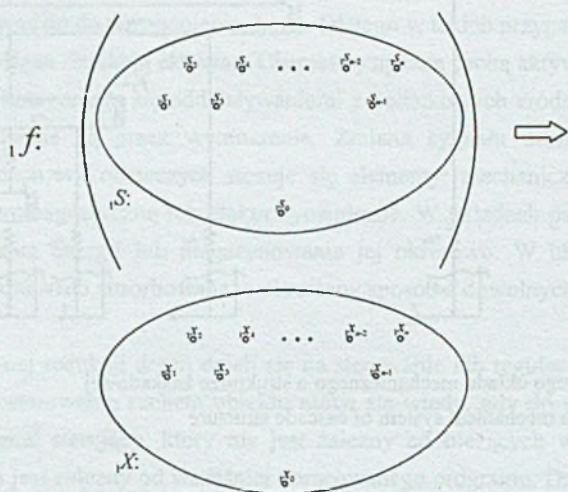
$$f_1: S \rightarrow X \wedge f_2: S \cup S \rightarrow X \quad (3)$$

w następujący sposób:

$$f_1(s_i) = x_i \text{ (rys. 2),} \quad (4)$$

gdzie:

$$s_i \in S, x_i \in X, (i=0, 1, \dots, n),$$



Rys. 2. Odwzorowanie współrzędnych uogólnionych w wierzchołki grafu

Fig. 2. Representation of generalised coordinates in graph vertices

oraz

$$f_2 = f_2' \cup f_2'' \cup f_2''' \cup f_2'''' \cup f_2''''', \quad (5)$$

gdzie:

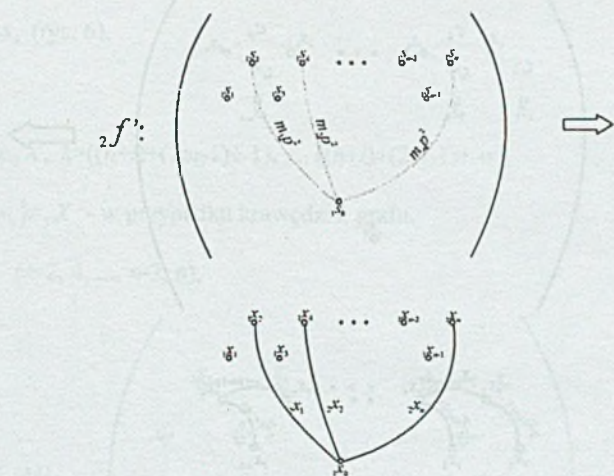
$$f_2'(s_k) = x_k \wedge f_2''(s_k) = x_k \text{ (rys.3),} \quad (6)$$

$$s_k \in S, x_k \in X, k=1, \dots, n,$$

$s_k = \{s_{i+1}, s_{k+1}, s_0\} \in S$ w przypadku elementów inercyjnych k układu,

$x_k = \{x_{i+1}, x_0\} \in X$ w przypadku krawędzi k grafu,

$${}_1x_i, {}_1x_0 \in {}_1X, \quad (i=2, \dots, n)$$



Rys. 3. Odwzorowanie elementów inercyjnych w krawędzie grafu

Fig. 3. Representation of inertial elements into graph edges

Linie koloru szarego występujące na rys. 3 oraz dalszych zaznaczono w celu przejrzystości i czytelności odwzorowań poszczególnych elementów układu (rys. 1.) w krawędzie grafu.

$${}_2f''({}_2s_k) = {}_2x_k \wedge {}_2f''({}_3s_k) = {}_2x_k \quad (\text{rys. 4}), \quad (7)$$

gdzie:

$${}_2s_k \in {}_2S, {}_2x_k \in {}_2X, \quad k=n+1, \dots, n+m, ((n+m)+1), \dots, ((n+(2m-1))),$$

$${}_3s_k = \{ {}_1s_{i+2}, {}_1s_{k+1}, {}_1s_{i-1}, {}_1s_{i+2}, {}_1s_{k+1}, {}_1s_0 \} \in {}_3S - \text{w przypadku elementów typu sprężystego } k \text{ układu,}$$

$${}_2x_k = \{ {}_1x_{i+1}, {}_1x_{i-1}, {}_1x_{i+1}, {}_1x_{i-2} \} \in {}_2X - \text{w przypadku krawędzi } k \text{ grafu,}$$

$${}_1x_i, {}_1x_{i-1}, {}_1x_{i-2} \in {}_1X, \quad (i=1, \dots, n),$$

wzbudzenia kinematyczne

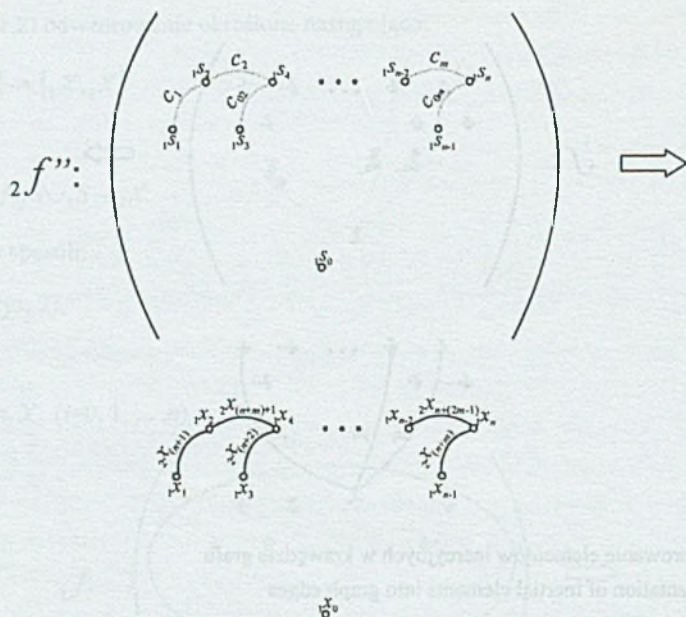
$${}_2f''({}_2s_k) = {}_2x_k \quad (\text{rys. 5}), \quad (8)$$

gdzie:

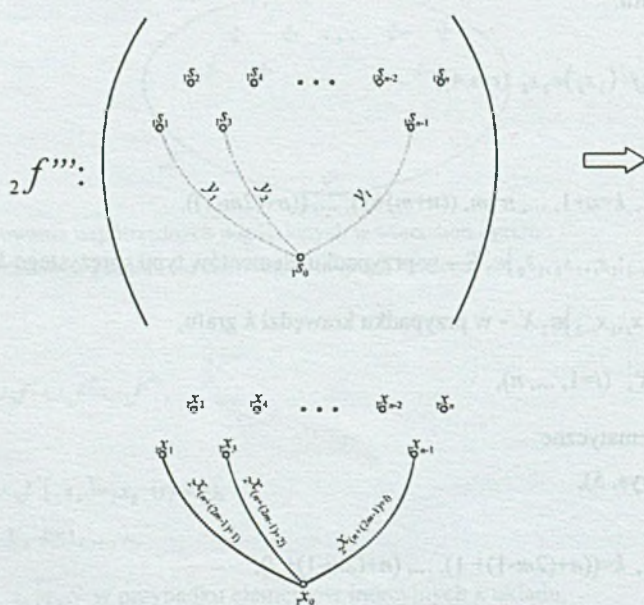
$${}_2s_k \in {}_2S, {}_2x_k \in {}_2X, \quad k=((n+(2m-1)+1), \dots, (n+(2m-1)+l)),$$

$${}_2x_k = \{ {}_1x_{i+1}, {}_1x_0 \} \in {}_2X \text{ w przypadku krawędzi } k \text{ grafu,}$$

${}_1x_i, {}_1x_0 \in {}_1X, (i=1, \dots, n-1),$



Rys. 4. Odwzorowanie elementów sprężystych w krawędzie grafu
Fig. 4. Representation of elastic elements into graph edges



Rys. 5. Odwzorowanie wzbudzeń kinematycznych w krawędzie grafu
Fig. 5. Representation of kinematic excitations into graph edges

wzbudzenia dynamiczne

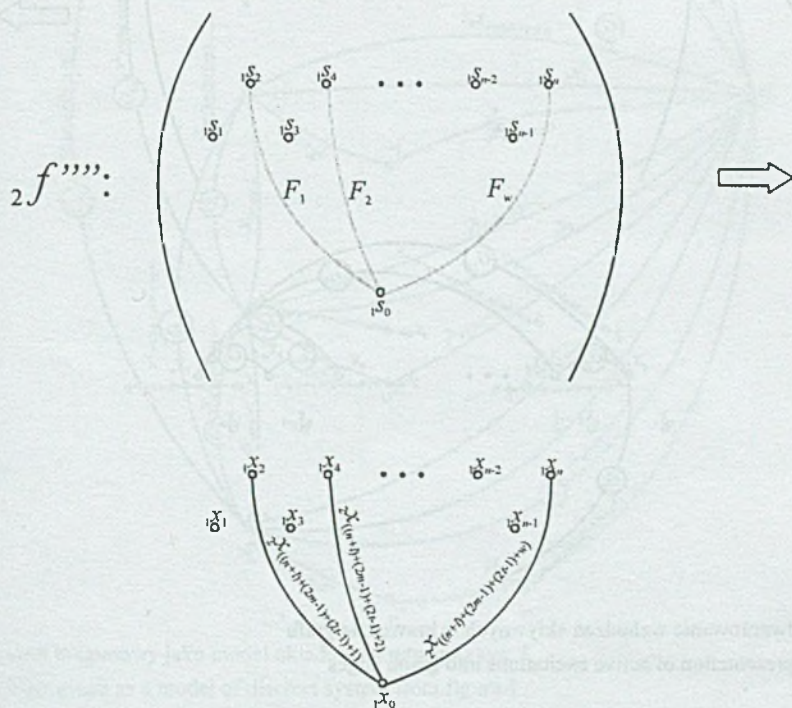
$${}_2f^{-}({}_2s_k) = {}_2x_k \quad (\text{rys. 6}), \quad (9)$$

gdzie:

$${}_2s_k \in {}_2S, {}_2x_k \in {}_2X, k = ((n+l)+(2m-1)+1), \dots, ((n+l)+(2m-1)+w),$$

$${}_2x_k = \{ {}_1x_i, {}_1x_0 \} \in {}_2X \text{ - w przypadku krawędzi } k \text{ grafu,}$$

$${}_1x_i, {}_1x_0 \in {}_1X, (i=2, 4, \dots, n-2, n),$$



Rys. 6. Odwzorowanie wzbudzeń dynamicznych w krawędzie grafu

Fig. 6. Representation of dynamic excitations into graph edges

wzbudzenia aktywne

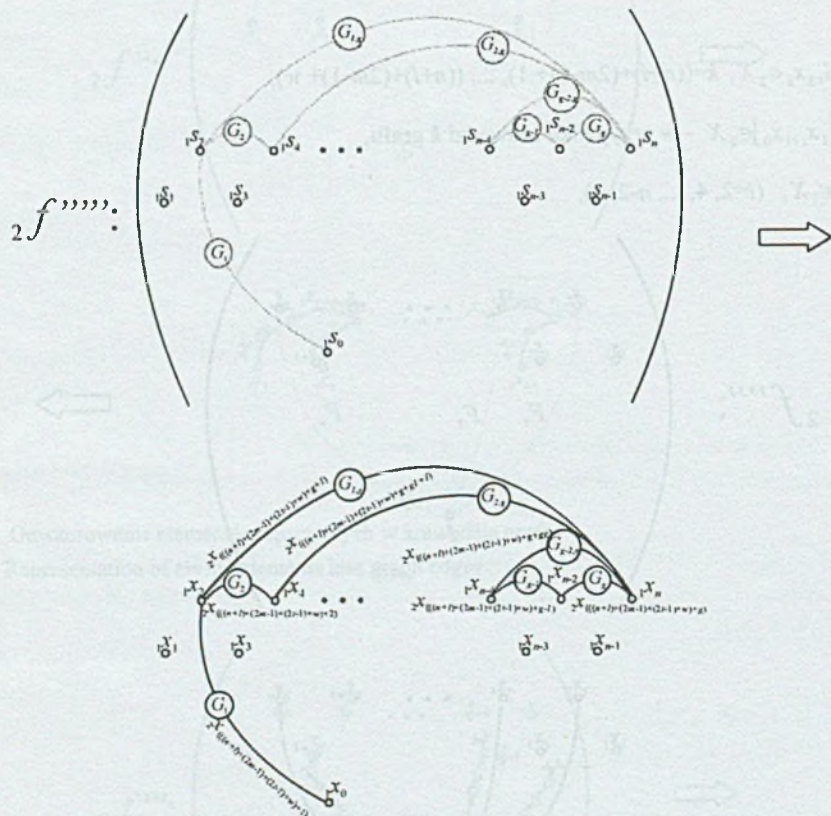
$${}_2f^{-}({}_2s_k) = {}_2x_k \quad (\text{rys. 7}), \quad (10)$$

gdzie:

$${}_2s_k \in {}_2S, {}_2x_k \in {}_2X, k = (((n+(2m-1)+l)+w)+1), \dots, (((n+(2m-1)+l)+w)+g), (((n+(2m-1)+l)+w)+g+1), \dots, (((n+(2m-1)+l)+w)+g+g_1), \dots, (((n+(2m-1)+l)+w)+g+g_1+g_g),$$

${}_2x_k = \{ {}_1x_{i+1}, x_{i-2}, {}_1x_{i+1}, x_{i-4} \} \in {}_2X$ - w przypadku krawędzi k grafu,

${}_1x_{i+1}, x_{i-2}, {}_1x_{i-4} \in {}_1X, (i=2, 4, \dots, n-2, n)$.



Rys. 7. Odwzorowanie wzbudzeń aktywnych w krawędzi grafu

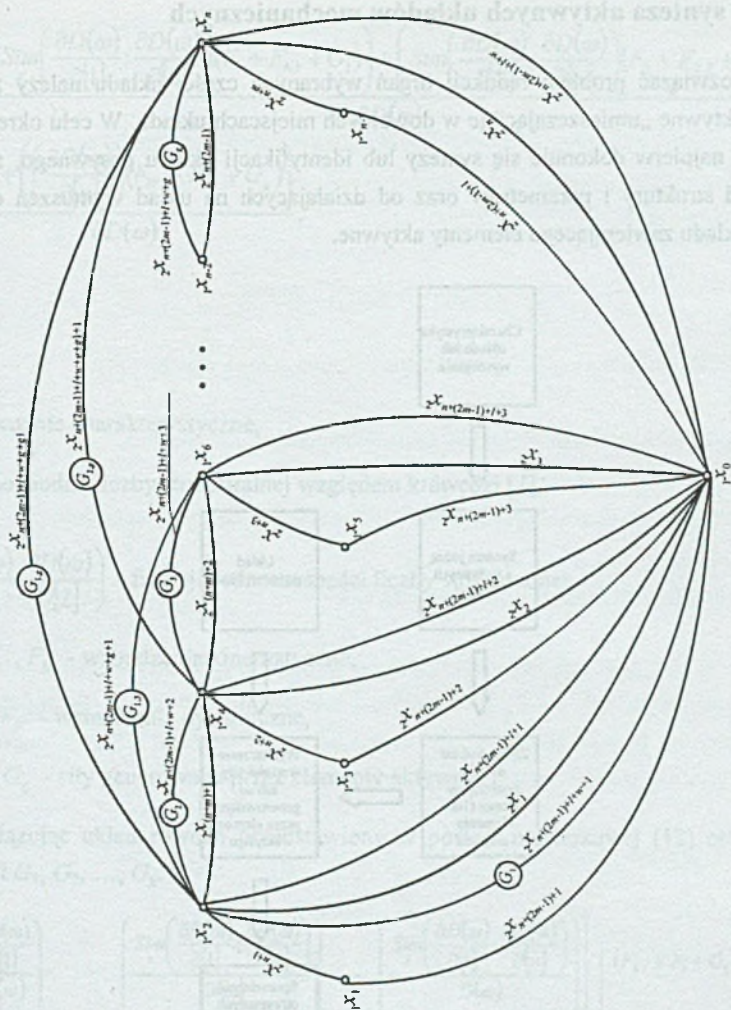
Fig. 7. Representation of active excitations into graph edges

Dokonując wzajemnych odwzorowań otrzymuje się graf (rys.8):

$$X_F = [{}_1X, {}_2X, F] = [X, F],$$

gdzie:

$$F = \{ {}_1f \}, \quad i=1,2.$$



Rys. 8. Graf biegunowy jako model układu dyskretnego z rys. 1

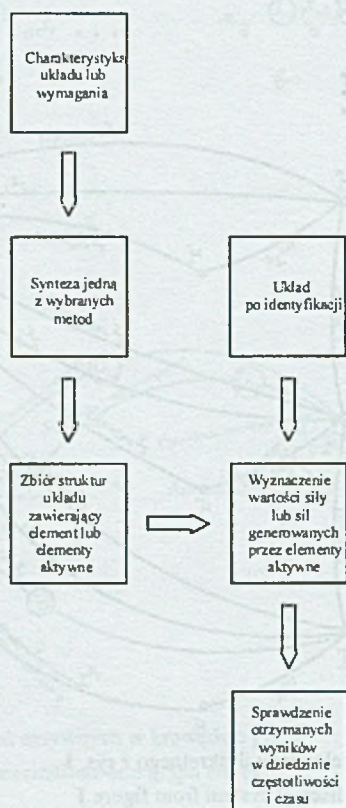
Fig. 8. Polar graph as a model of discrete system from figure 1

Przedstawiony sposób modelowania aktywnych układów mechanicznych za pomocą grafów i liczb strukturalnych umożliwia automatyzację obliczeń podczas wyznaczania charakterystyk dynamicznych układu. Stosowanie tej nieklasycznej metody modelowania umożliwia pełną algorytmizację obliczeń oraz bezpośrednie śledzenie wprowadzonych zmian strukturalnych.

Przedstawienie układu mechanicznego w postaci grafu biegunowego jest podstawą do wyznaczenia częstości drgań własnych oraz charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych tego układu.

Analiza i synteza aktywnych układów mechanicznych

Aby rozwiązać problem redukcji drgań wybranych części układu należy zastosować elementy aktywne „umieszczając” je w dowolnych miejscach układu. W celu określenia tych elementów najpierw dokonuje się syntezy lub identyfikacji układu pasywnego, a następnie zależnie od struktury i parametrów oraz od działających na układ wymuszeń dobiera się strukturę układu zawierającego elementy aktywne.



Rys. 9. Idea syntezy aktywnych układów mechanicznych

Fig. 9. Idea of synthesis of active mechanical elements

Korzystając z teorii grafów biegunowych i ich związku z liczbami strukturalnymi [1,3,4,7÷8] można wyznaczyć wartości sił generowanych przez elementy aktywne.

Ogólny wzór na wartość amplitudy jest określony wzorem:

$$A_n = \frac{\left(\text{Sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [n]} \right) (F_1 + F_{K1} + G_1) \right) + \left(\text{Sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [n]} \right) (F_2 + F_{K2} + G_2) \right)}{\partial D(\omega)} +$$

$$+ \dots + \frac{\left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [n]} \right) (F_w + F_{Kl} + G_g)}{\partial D(\omega)}, \quad (12)$$

gdzie:

$D(\omega)$ - równanie charakterystyczne,

$\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}$ - pochodna liczby strukturalnej względem krawędzi [1],

$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]} \right)$ - funkcja jednoczesności liczby strukturalnej,

$F_{K1}, F_{K2}, \dots, F_{Kl}$ - wzbudzenia kinematyczne,

F_1, F_2, \dots, F_w - wzbudzenia dynamiczne,

G_1, G_2, \dots, G_g - siły generowane przez elementy aktywne.

Rozwiązując układ równań przedstawiony w postaci macierzowej (12) otrzymuje się wartości sił G_1, G_2, \dots, G_g .

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]} \right) / D(\omega) & \left(\text{Sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]} \right) \right) / D(\omega) & \dots & \left(\text{Sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [n]} \right) \right) / D(\omega) \\ \left(\text{Sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]} \right) \right) / D(\omega) & \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]} \right) / D(\omega) & \dots & \left(\text{Sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [n]} \right) \right) / D(\omega) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\text{Sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [n]} \right) \right) / D(\omega) & \left(\text{Sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [n]} \right) \right) / D(\omega) & \dots & \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [n]} \right) / D(\omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (F_{K1} + F_1 + G_1) \\ (F_{K2} + F_2 + G_2) \\ \vdots \\ (F_{Kl} + F_w + G_g) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Przystępując do projektowania układu pasywnego wraz z elementem aktywnym należy postępować według następującego planu:

Krok 1

Należy określić wartości poszczególnych częstości drgań własnych.

Krok 2

Określić rodzaj syntezowanej funkcji.

Krok 3

Zsyntezować funkcję za pomocą jednej z metod syntezy.

Krok 4

Określić działające na układ wzbudzenia kinematyczne i dynamiczne.

Krok 5

Wybrać strukturę układu z elementem lub elementami aktywnymi.

Krok 6

Wyznaczyć wartość siły bądź sił generowanych przez elementy aktywne.

Przykład zastosowania elementów aktywnych do redukcji drgań

Jako przykład zaprojektowania układu pasywnego z aktywnymi elementami wybrano układ o trzech stopniach swobody ze wzbudzeniem kinematycznym. Postępując zgodnie z przedstawionym planem jako pierwszą czynność należy określić wartości poszczególnych częstości rezonansowych i antyrezonansowych.

Wartości poszczególnych częstości:

$$\begin{cases} \omega_1 = 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \omega_2 = 12 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \omega_3 = 18 \frac{\text{rad}}{\text{s}} - \text{częstości rezonansowe,} \\ \omega_0 = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \omega_4 = 9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \omega_5 = 15 \frac{\text{rad}}{\text{s}} - \text{częstości antyrezonansowe.} \end{cases}$$

Wartości częstotliwości:

$$\begin{cases} f_1 = 0.95 \text{ Hz}, f_3 = 1.91 \text{ Hz}, f_5 = 2.86 \text{ Hz} - \text{bieguny,} \\ f_0 = 0 \text{ Hz}, f_2 = 1.43 \text{ Hz}, f_4 = 2.38 \text{ Hz} - \text{zera.} \end{cases}$$

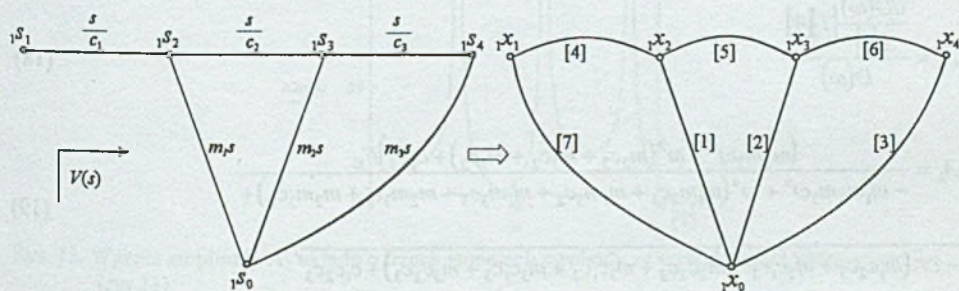
W kolejnym kroku określa się rodzaj syntezowanej funkcji. Ponieważ w wyniku syntezy ma być otrzymany układ ze wzbudzeniem kinematycznym, to funkcja poddana syntezie powinna być ruchliwością o następującej postaci:

$$V(s) = H \left(\frac{s(s^2 + \omega_2^2)(s^2 + \omega_4^2)}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_3^2)(s^2 + \omega_5^2)} \right) \quad (14)$$

W trzecim kroku zostaje wybrana metoda syntezy. W tym przypadku stosuje się rozkład funkcji na ułamek łańcuchowy. W wyniku rozkładu otrzymuje się strukturę i parametry układu pasywnego.

$$V(s) \frac{1}{H} = \frac{s}{c_1} + \frac{1}{m_1 s + \frac{1}{\frac{s}{c_2} + \frac{1}{m_2 s + \frac{1}{\frac{s}{c_3} + \frac{1}{m_3 s}}}}}, \quad (15)$$

$$V(s) \frac{1}{H} = \frac{s}{198} + \frac{1}{1s + \frac{1}{\frac{s}{77} + \frac{1}{0.75s + \frac{1}{\frac{s}{32} + \frac{1}{0.38s}}}}}, \quad (16)$$

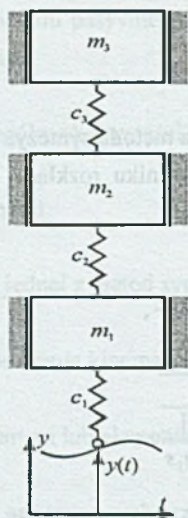


Rys. 10. Graf biegunowy

Fig. 10. Polar graph

Wzbudzenie kinematyczne działające na układ:

$$F_k = c_1 y_0 \sin \alpha x \quad (17)$$



Rys. 11. Model układu ze wzbudzeniem kinematycznym

Fig. 11. Model of system with kinematic excitation

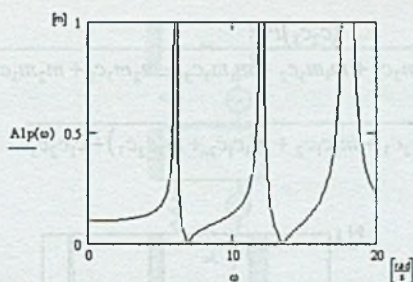
Aby wyznaczyć amplitudy drgań tego układu należy skorzystać z zależności pomiędzy grafami a liczbami strukturalnymi [1,3,4,7÷8]. W tym przypadku przyjmują one następujące postacie:

$$A_1 = \frac{\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]} [7] [4]}{D(\omega)} \quad (18)$$

$$A_1 = \frac{(m_2 m_3 \omega^4 - \omega^2 (m_2 c_3 + m_3 c_2 + m_3 c_3) + c_2 c_3) F_K}{-m_1 m_2 m_3 \omega^6 + \omega^4 (m_1 m_2 c_3 + m_1 m_3 c_2 + m_1 m_3 c_3 + m_2 m_3 c_1 + m_2 m_3 c_2) + \omega^2 (m_1 c_2 c_3 + m_2 c_1 c_3 + m_2 c_2 c_3 + m_3 c_1 c_2 + m_3 c_1 c_3 + m_3 c_2 c_3) + c_1 c_2 c_3} \quad (19)$$

Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe układu (rys. 12.) przedstawiono na rys.13÷15.

Występujące na rys. 13÷15,18÷26 oznaczenia $A_{1p}(\omega)$, $A_{2p}(\omega)$ i $A_{3p}(\omega)$ są równoznaczne z A_1 , A_2 i A_3 (wzory (18÷23), (25÷30)); czyli: $A_{1p}(\omega) = A_1$, $A_{2p}(\omega) = A_2$ oraz $A_{3p}(\omega) = A_3$.

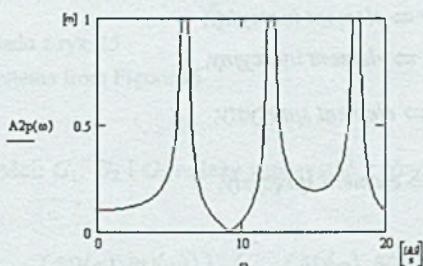


Rys. 12. Wykres amplitudy A_1 układu o trzech stopniach swobody ze wzbudzeniem kinematycznym (rys.11)

Fig. 12. Diagram of A_1 amplitude of a system of three degrees of freedom with kinematic excitation (figure 11)

$$A_2 = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]} \right) [7] [4]}{D(\omega)} \quad (20)$$

$$A_2 = \frac{(-m_3 c_2 \omega^2 + c_2 c_3) F_K}{-m_1 m_2 m_3 \omega^6 + \omega^4 (m_1 m_2 c_3 + m_1 m_3 c_2 + m_1 m_3 c_3 + m_2 m_3 c_1 + m_2 m_3 c_2) + \omega^2 (m_1 c_2 c_3 + m_2 c_1 c_3 + m_2 c_2 c_3 + m_3 c_1 c_2 + m_3 c_1 c_3 + m_3 c_2 c_3) + c_1 c_2 c_3} \quad (21)$$

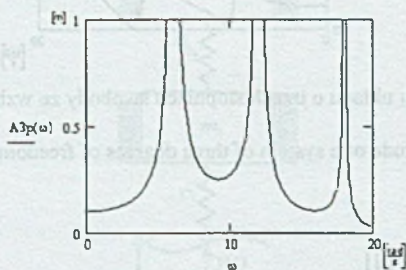


Rys. 13. Wykres amplitudy A_2 układu o trzech stopniach swobody ze wzbudzeniem kinematycznym (rys.11)

Fig. 13. Diagram of A_2 amplitude of a system of three degrees of freedom with kinematic excitation (figure 11)

$$A_3 = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [3]} \right) [7] [4]}{D(\omega)} \quad (22)$$

$$A_3 = \frac{(c_2 c_3) F_K}{-m_1 m_2 m_3 \omega^6 + \omega^4 (m_1 m_2 c_3 + m_1 m_3 c_2 + m_1 m_3 c_3 + m_2 m_3 c_1 + m_2 m_3 c_2) + -\omega^2 (m_1 c_2 c_3 + m_2 c_1 c_3 + m_2 c_2 c_3 + m_3 c_1 c_2 + m_3 c_1 c_3 + m_3 c_2 c_3) + c_1 c_2 c_3} \quad (23)$$



Rys. 14. Wykres amplitudy A_3 układu o trzech stopniach swobody ze wzbudzeniem kinematycznym (rys.11)

Fig. 14. Diagram of A_3 amplitude of a system of three degrees of freedom with kinematic excitation (figure 11)

Do zredukowania drgań powodujących wychylenia ciał o masie m_1 , m_2 i m_3 wybrany został układ (rys. 16), utworzony z następujących elementów:

$$m_1 p^2 \rightarrow m_1 = 100 \text{ kg} \Rightarrow \text{element inercyjny,}$$

$$m_2 p^2 \rightarrow m_2 = 75 \text{ kg} \Rightarrow \text{element inercyjny,}$$

$$m_3 p^2 \rightarrow m_3 = 38 \text{ kg} \Rightarrow \text{element inercyjny,}$$

$$c_1 \rightarrow c_1 = 19800 \frac{\text{N}}{\text{m}} \Rightarrow \text{element sprężysty,}$$

$$c_2 \rightarrow c_2 = 7700 \frac{\text{N}}{\text{m}} \Rightarrow \text{element sprężysty,}$$

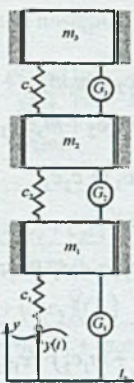
$$c_3 \rightarrow c_3 = 3200 \frac{\text{N}}{\text{m}} \Rightarrow \text{element sprężysty,}$$

$$y \rightarrow y = 0.05 \text{ m} \Rightarrow \text{przemieszczenie,}$$

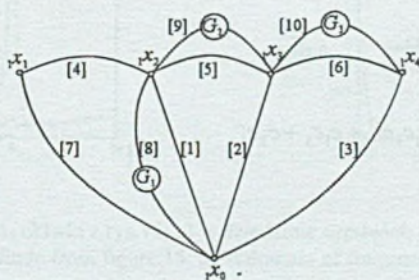
$$G_1 \Rightarrow \text{sila generowana przez element aktywny 1,}$$

$$G_2 \Rightarrow \text{sila generowana przez element aktywny 2,}$$

$$G_3 \Rightarrow \text{sila generowana przez element aktywny 3.}$$



Rys. 15. Model układu ze wzbudzeniem kinematycznym oraz elementami aktywnymi
 Fig. 15. System of three degrees of freedom with four active elements



Rys. 16. Graf biegunowy układu z rys. 15
 Fig. 16. Polar graph of the systems from Figure 15

Aby wyznaczyć wartości: G_1 , G_2 i G_3 należy skorzystać z równania (13). Przyjmuje ono postać:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]} \right) / D(\omega) & \left(\frac{\text{Sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]} \right)}{D(\omega)} \right) & \left(\frac{\text{Sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [3]} \right)}{D(\omega)} \right) \\ \left(\frac{\text{Sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]} \right)}{D(\omega)} \right) & \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]} \right) / D(\omega) & \left(\frac{\text{Sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [3]} \right)}{D(\omega)} \right) \\ \left(\frac{\text{Sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [3]} \right)}{D(\omega)} \right) & \left(\frac{\text{Sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [3]} \right)}{D(\omega)} \right) & \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [3]} \right) / D(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_K + (G_1 + G_2) \\ (G_2 + G_3) \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

gdzie:

$$D(\omega) = -m_1 m_2 m_3 \omega^6 + \omega^4 (m_1 m_2 c_3 + m_1 m_3 c_2 + m_1 m_3 c_3 + m_2 m_3 c_1 + m_2 m_3 c_2) + \\ - \omega^2 (m_1 c_2 c_3 + m_2 c_1 c_3 + m_2 c_2 c_3 + m_3 c_1 c_2 + m_3 c_1 c_3 + m_3 c_2 c_3) + c_1 c_2 c_3,$$

$$\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]} = m_2 m_3 \omega^4 - \omega^2 (m_2 c_3 + m_3 c_2 + m_3 c_3) + c_2 c_3,$$

$$\frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]} = m_1 m_3 \omega^4 - \omega^2 (m_1 c_3 + m_3 c_1 + m_3 c_2) + c_1 c_3 + c_2 c_3,$$

$$\frac{\partial D(\omega)}{\partial [3]} = m_1 m_2 \omega^4 - \omega^2 (m_1 c_2 + m_1 c_3 + m_2 c_1 + m_2 c_2) + c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3,$$

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]} \right) = -m_3 c_2 \omega^2 + c_2 c_3,$$

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [3]} \right) = c_2 c_3,$$

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [3]} \right) = -m_1 c_3 \omega^2 + c_1 c_3 + c_2 c_3,$$

$$F_k = c_1 y_0 \sin \omega t,$$

$$y_0 = 0.05 \text{ m},$$

$$F_k = 990 \text{ N}$$

Po rozwiązaniu (23) przy $\omega = \omega_1$ otrzymano wartości G_1 , G_2 i G_3 :

$$G_1 + G_2 = 313.27 \text{ N},$$

$$G_2 + G_3 = -177.36 \text{ N},$$

$$G_3 = -131.54 \text{ N},$$

czyli:

$$G_1 = 359.09 \text{ N},$$

$$G_2 = -45.82 \text{ N},$$

$$G_3 = -131.54 \text{ N}.$$

Na wykresach (rys. 17÷25) przerywaną linią zaznaczono amplitudy w przypadku, gdy na układ działa jedynie wzbudzenie kinematyczne, a ciągłą linią zaznaczono wychylenia, gdy do układu dołączone są elementy aktywne redukujące drgania.

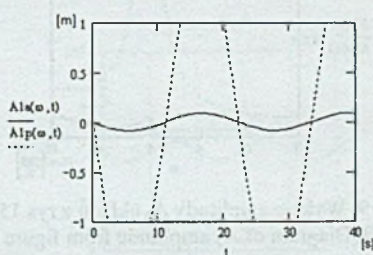
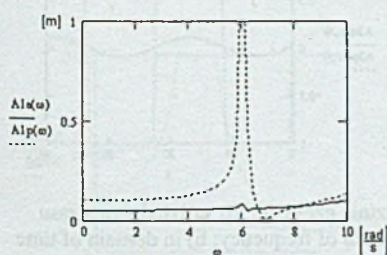
Amplitudy układu (rys. 15.) przyjmują następujące postacie:

$$A_1 = \frac{\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]} ([7][4] + [8] + [9]) + \text{Sim} \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}; \frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]} \right) ([9] + [10]) + \text{Sim} \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}; \frac{\partial D(\omega)}{\partial [3]} \right) ([10])}{D(\omega)}, \quad (25)$$

$$A_1 = \frac{(m_2 m_3 \omega^4 - \omega^2 (m_2 c_3 + m_3 c_2 + m_3 c_3) + c_2 c_3) (F_K + G_1 + G_2)}{-m_1 m_2 m_3 \omega^6 + \omega^4 (m_1 m_2 c_3 + m_1 m_3 c_2 + m_1 m_3 c_3 + m_2 m_3 c_1 + m_2 m_3 c_2) + (-m_3 c_2 \omega^2 + c_2 c_3) (G_2 + G_3) + (c_2 c_3) (G_3)}{-\omega^2 (m_1 c_2 c_3 + m_2 c_1 c_3 + m_2 c_2 c_3 + m_3 c_1 c_2 + m_3 c_1 c_3 + m_3 c_2 c_3) + c_1 c_2 c_3} \quad (26)$$

a)

b)



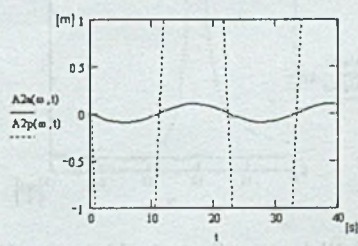
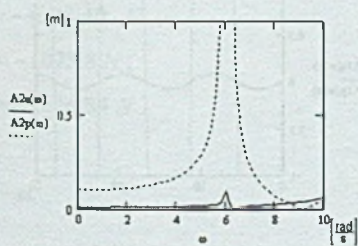
Rys. 17. Wykres amplitudy A_1 układu z rys.15: a) w dziedzinie częstości; b) w dziedzinie czasu
Fig. 17. Diagram of A_1 amplitude from figure 15: a) in domain of frequency; b) in domain of time

$$A_2 = \frac{\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]} ([7][4] + [8] + [9]) + \text{Sim} \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}; \frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]} \right) ([9] + [10]) + \text{Sim} \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}; \frac{\partial D(\omega)}{\partial [3]} \right) ([10])}{D(\omega)} \quad (27)$$

$$A_2 = \frac{(-m_3 c_2 \omega^2 + c_2 c_3) (F_K + G_1 + G_2) + (-m_1 c_3 \omega^2 + c_1 c_3 + c_2 c_3) (G_3)}{-m_1 m_2 m_3 \omega^6 + \omega^4 (m_1 m_2 c_3 + m_1 m_3 c_2 + m_1 m_3 c_3 + m_2 m_3 c_1 + m_2 m_3 c_2) + (m_1 m_3 \omega^4 - \omega^2 (m_1 c_3 + m_3 c_1 + m_3 c_2) + c_1 c_3 + c_2 c_3) (G_2 + G_3)}{-\omega^2 (m_1 c_2 c_3 + m_2 c_1 c_3 + m_2 c_2 c_3 + m_3 c_1 c_2 + m_3 c_1 c_3 + m_3 c_2 c_3) + c_1 c_2 c_3} \quad (28)$$

a)

b)

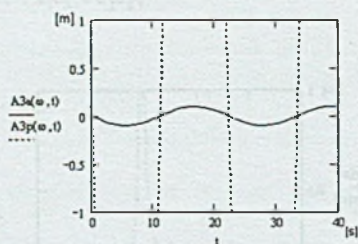
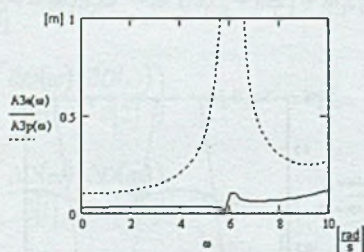


Rys. 18. Wykres amplitudy A_2 układu z rys.15: a) w dziedzinie częstości; b) w dziedzinie czasu
Fig. 18. Diagram of A_2 amplitude from figure 15: a) in domain of frequency; b) in domain of time

$$A_3 = \frac{\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]} ([7][4] + [8] + [9]) + Sim_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}; \frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]} \right) ([9] + [10]) + Sim_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}; \frac{\partial D(\omega)}{\partial [3]} \right) ([10])}{D(\omega)} \quad (29)$$

$$A_3 = \frac{(c_2 c_3)(F_K + G_1 + G_2) + (-m_1 c_3 \omega^2 + c_1 c_3 + c_2 c_3)(G_2 + G_3)}{-m_1 m_2 m_3 \omega^6 + \omega^4 (m_1 m_2 c_3 + m_1 m_3 c_2 + m_1 m_3 c_3 + m_2 m_3 c_1 + m_2 m_3 c_2) + (m_1 m_2 \omega^4 - \omega^2 (m_1 c_2 + m_1 c_3 + m_2 c_1 + m_2 c_2) + c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3)(G_3)} - \omega^2 (m_1 c_2 c_3 + m_2 c_1 c_3 + m_2 c_2 c_3 + m_3 c_1 c_2 + m_3 c_1 c_3 + m_3 c_2 c_3) + c_1 c_2 c_3 \quad (30)$$

a) b)



Rys. 19. Wykres amplitudy A_3 układu z rys.15: a) w dziedzinie częstotliwości; b) w dziedzinie czasu
Fig. 19. Diagram of A_3 amplitude from figure 15: a) in domain of frequency; b) in domain of time

Po rozwiązaniu (23) przy $\omega = \omega_2$ otrzymano wartości G_1 , G_2 i G_3 :

$$G_1 + G_2 = -617.69 \text{ N},$$

$$G_2 + G_3 = -973.59 \text{ N},$$

$$G_3 = -541.53 \text{ N},$$

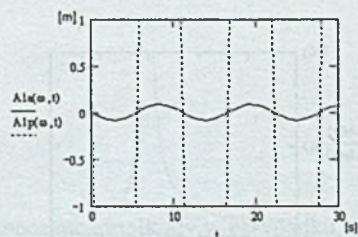
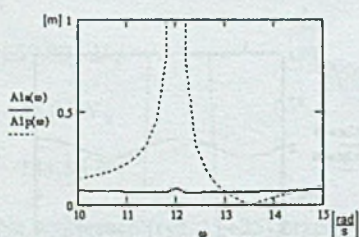
czyli:

$$G_1 = -185.63 \text{ N},$$

$$G_2 = -432.06 \text{ N},$$

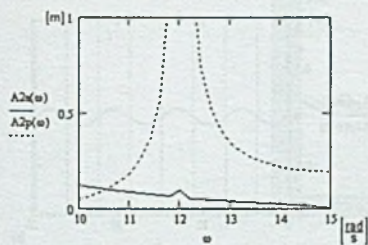
$$G_3 = -541.53 \text{ N}.$$

a) b)

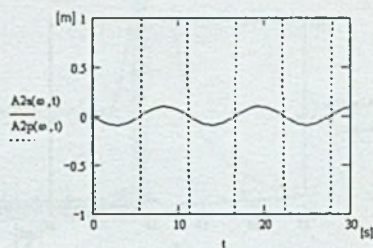


Rys. 20. Wykres amplitudy A_1 układu z rys.15: a) w dziedzinie częstotliwości; b) w dziedzinie czasu
Fig. 20. Diagram of A_1 amplitude from figure 15: a) in domain of frequency; b) in domain of time

a)

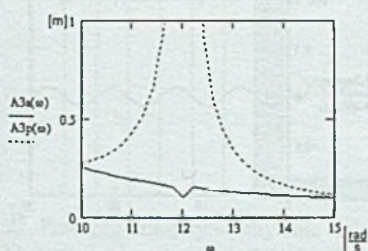


b)

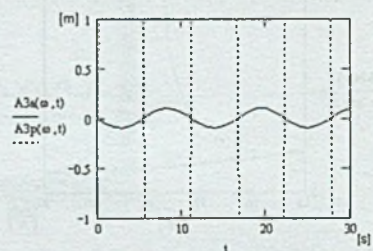


Rys. 21. Wykres amplitudy A_2 układu z rys.15: a) w dziedzinie częstości; b) w dziedzinie czasu
Fig. 21. Diagram of A_2 amplitude from figure 15: a) in domain of frequency; b) in domain of time

a)



b)



Rys. 22. Wykres amplitudy A_3 układu z rys.15: a) w dziedzinie częstości; b) w dziedzinie czasu
Fig. 22. Diagram of A_3 amplitude from figure 15: a) in domain of frequency; b) in domain of time

Po rozwiązaniu (23) przy $\omega = \omega_3$ otrzymano wartości G_1 , G_2 i G_3 :

$$G_1 + G_2 = -2169.29 \text{ N},$$

$$G_2 + G_3 = -2300.64 \text{ N},$$

$$G_3 = -1224.84 \text{ N},$$

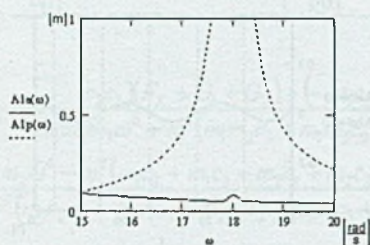
czyli:

$$G_1 = -1093.49 \text{ N},$$

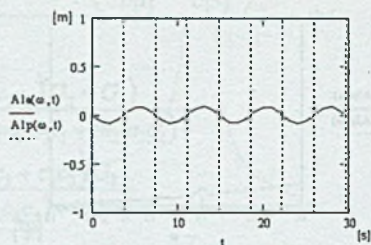
$$G_2 = -1075.8 \text{ N},$$

$$G_3 = -1224.84 \text{ N}.$$

a)

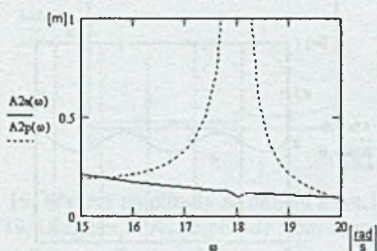


b)

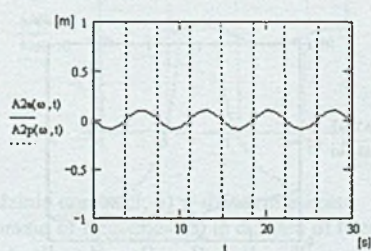


Rys. 23. Wykres amplitudy A_1 układu z rys.15: a) w dziedzinie częstotliwości; b) w dziedzinie czasu
Fig. 23. Diagram of A_1 amplitude from figure 15: a) in domain of frequency; b) in domain of time

a)

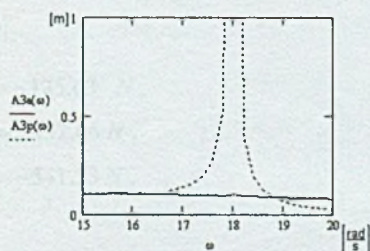


b)

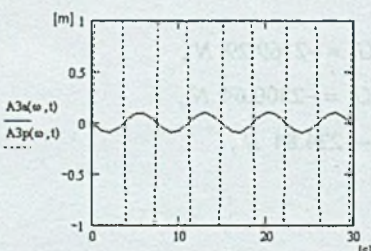


Rys. 24. Wykres amplitudy A_2 układu z rys.15: a) w dziedzinie częstotliwości; b) w dziedzinie czasu
Fig. 24. Diagram of A_2 amplitude from figure 15: a) in domain of frequency; b) in domain of time

a)

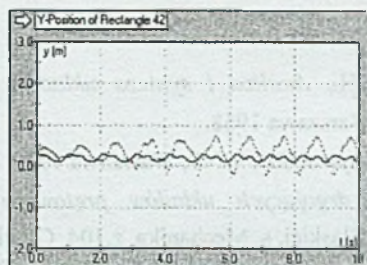


b)

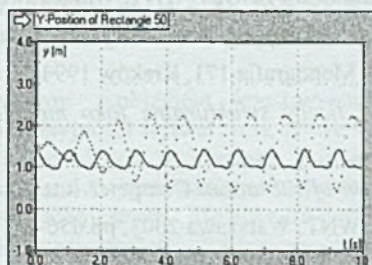


Rys. 25. Wykres amplitudy A_3 układu z rys.15: a) w dziedzinie częstotliwości; b) w dziedzinie czasu
Fig. 25. Diagram of A_3 amplitude from figure 15: a) in domain of frequency; b) in domain of time

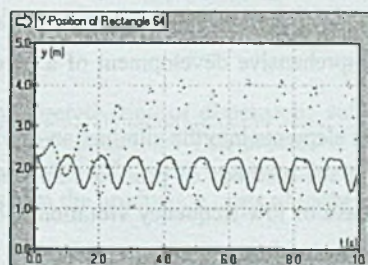
Aby przedstawić wychylenia poszczególnych elementów inercyjnych układu zamodelowano ten układ w programie symulacyjnym. Na wykresach przerywaną linią zaznaczono wychylenia w przypadku, gdy na układ działa jedynie wzbudzenie kinematyczne, a ciągłą linią zaznaczono wychylenia, gdy do układu dołączone są elementy aktywne redukujące drgania.



Rys. 26. Przebieg czasowy wychylenia ciała o masie m_1
 Fig. 26. Temporal course of deflection of body of mass m_1



Rys. 27. Przebieg czasowy wychylenia ciała o masie m_2
 Fig. 27. Temporal course of deflection of body of mass m_2



Rys. 28. Przebieg czasowy wychylenia ciała a masie m_3
 Fig. 28. Temporal course of deflection of body of mass m_3

Podsumowanie

Zastosowanie aktywnych sposobów eliminacji drgań pozwala na przewyżczenie ograniczeń występujących w układach pasywnych. Metody aktywne stosowane są przy redukcji poziomu drgań maszyn, urządzeń, instalacji, linii energetycznych, budowli, środków transportu itp.

Pracę wykonano w ramach projektu badawczego Nr 5 T07C 041 25 finansowanego przez Komitet Badań Naukowych w latach 2003-2005.

Literatura

1. Bellert S., Woźniacki H., *Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych*. WNT, Warszawa 1968.
2. Białko M., red., *Filtry aktywne RC*. WNT, Warszawa 1979.
3. Buchacz A., *Synteza drgających układów prętowych w ujęciu grafów i liczb strukturalnych*. ZN Pol. Śląskiej, s. Mechanika, z.104, Gliwice 1991.
4. Buchacz A. (red.), *Komputerowe wspomaganie syntezy i analizy podzespołów maszyn modelowanych grafami i liczbami strukturalnymi*. ZN Pol. Śl. s. Mechanika z.127, Gliwice 1997.
5. Kendall L. Su, *Teoria układów aktywnych*. WNT, Warszawa 1969.
6. Michałowski S., *Aktywne układy w konstrukcji maszyn roboczych*. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Monografia 171, Kraków 1994.
7. Wojnarowski J., *Grafy i liczby strukturalne jako modele układów mechanicznych*. PTMST, Gliwice 1977.
8. Żurek K., *Active Reduction of Vibration*. Computer Integrated Manufacturing Advanced Design and Management. WNT, Warszawa 2003, pp.656-661.

Abstract

This work presents the modelling, analysis and synthesis of active mechanical systems incorporating the method of polar graphs and their relationships with structural numbers. The work is an attempt at the comprehensive development of a reverse task of the dynamics of active mechanical systems.

The introduction of active elements into the elimination of vibration offers the possibility to overcome the limitations of the methods of passive elimination of vibration, such as, in particular, low efficiency in case of low-frequency vibration and the impossibility to reduce the vibration of specific parts of machinery.

In this work, the method of polar graphs and their relationships with structural numbers were used in order to derive equations determining the values of amplitudes of forces generated by active elements. The use of such a method enables the automation of calculation during the determination of dynamic characteristics of a system and the algorithmisation of calculations.

The approach adopted makes it possible to undertake actions aiming at the elimination of phenomena resulting in the unwanted operation of machinery or generation of hazardous situations in the machinery environment. Thank to the approach, the aforementioned preventive activities can be conducted as early as during the designing of future functions of the system as well as during the construction of the system in question.