ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1987

Seria: TRANSPORT z. 7 Nr kol. 914

Roman BĄK
Bogna MRÓWCZYŃSKA

ZASTOSOWANIE METODY ANALIZY WRAŻLIWOŚCI W PROJEKTOWANIU KSZTAŁTU TARCZY KOŁA KOLEJOWEGO

Streszczenie. W artykule omówiono zastosowanie analizy wrażliwości i optymalizacji w projektowaniu tarczy koła kolejowego. Na wstępie zostało sformułowane zadanie optymalizacji kształtu tarczy przy ograniczeniach narzuconych na jej objętość. Podano warunki konieczne istnienia poszukiwanego ekstremum.

Sformułowano również zadanie analizy wrażliwości badania zmian sztywności tarczy koła w zależności od kształtu brzegu. Następnie zaprezentowano model numeryczny zadania analizy wrażliwości oraz algorytm jego rozwiązania.

Podano również algorytm optymalizacji tarczy koła. Zastosowano w nim metodę rzutu gradientu. Do wyznaczania gradientu funkcjonału jakości wykorzystano przedstawiony wcześniej algorytm otrzymywania macierzy wrażliwości.

1. WSTĘP

Metody analizy numerycznej, w tym metoda elementów skończonych, stosowane dotychczas w procesie konstruowania kolejowych zestawów kołowych, pozwalały na sprawdzenie odpowiednich warunków wytrzymałościowych dla zadanych z góry wymiarów zestawu i kształtu tarczy koła. Kształt i wymiary były dobierane przez konstruktora. Prawidłowość tego wyboru zależała w dużej mierze od jego intuicji i doświadczenia.

Obecny poziom komputeryzacji i zastosowań modelowania matematycznego w mechanice pozwala na wspomaganie inżynierskiej intuicji obiektywnym procesem optymalizacji matematycznej [4, 9]. Rola człowieka w projektowaniu sprowadza się do dwóch etapów:

1. przyjęcia modelu matematycznego zadania projektowania konstrukcji w taki sposób, by najściślej odpowiadał on reprezentowanej rzeczywistości;
2. wyboru odpowiednich metod numerycznych, jakimi należy zadanie rozwiązać.

Od sposobu postawienia zadania zależy, czy otrzymane rozwiązanie można w ogóle traktować jako dopuszczalne. Od sposobu dyskretyzacji i dokładności stosowanych metod numerycznych zależy dokładność otrzymanego rozwiązania.

W sensie matematycznym problem optymalnego kształtowania sprowadza się do zadania poszukiwania ekstremu funkcjonału przyjętego jako miara jakości konstrukcji - zadanego na obszarze o zmiennym brzegu przy najczęściej nieliniowych ograniczeniach.

Rozwiązanie tak postawionego zadania polega na wyznaczeniu metodami analizy matematycznej warunków koniecznych i wystarczających do istnienia ekstremu, czyli otrzymania układu równań, który dalej rozwiązuje się numerycznie.

W niektórych przypadkach takie postępowanie staje się zbyt złożone. Ponadto czasami na kształtowaną konstrukcję jest nałożone tyle ograniczeń narzuconych normami, że inżyniera właściwie tylko interesuje, na ile niewielka zmiana kształtu elementu konstrukcji (np. w wyniku zużycia elementu lub niedokładności obróbki) na wpływ na zmianę warunków wytrzymałościowych. Na tego typu pytania daje odpowiedź analiza wrażliwości.

Analiza wrażliwości jest metodą zajmującą się, w sensie matematycznym, badaniem zależności przyrostu funkcjonału jakości od parametrów kształtu opisujących zmiany brzegu. Do znalezienia tej zależności nie trzeba wyznaczać warunków koniecznych i wystarczających istnienia ekstremu, co znacznie upraszcza rozwiązanie analityczne i numeryczne.

W poniższej pracy zostanie przedstawiony algorytm analizy wrażliwości i kształtu tarczy koła, a także algorytm optymalizacji kształtu tarczy koła ze względu na maksimum sztywności.

2. SFORMUŁOWANIE ZADANIA OPTYMALIZACJI KSZTAŁTU TARCZY KOŁA

W sensie geometrycznym tarczę koła kolejowego można przedstawić jako ciało osiowosymetryczne, zajmujące obszar V o przekroju D ograniczonym brzegiem S (rys. 1). Brzeg S obrócony o kąt 2π wokół osi OZ tworzy powłokę ograniczającą obszar V. Ze względu na osiową symetrię zarówno w sensie geometrycznym, jak i fizycznym zadanie można w pewnym stopniu rozpatrywać jako płaskie.

Brzeg S jest sumą:

S_t - brzegu obciążonego siłami powierzchniowymi:

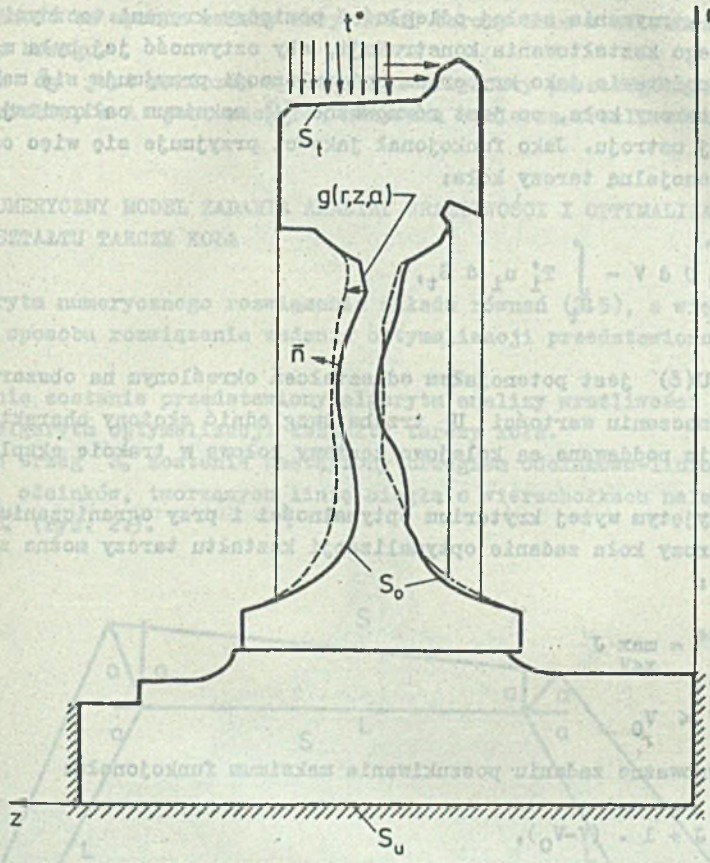
$t_i = \sigma_{ij} n_j$, σ_{ij} - składowe tensora stanu naprężenia,

n_j - cosinusy kierunkowe,

S_u - brzegu, na którym przemieszczenia $u_i = 0$,

S_0 - brzegu swobodnego, nie obciążonego, który zostanie poddany optymalizacji.

W cylindrycznym układzie współrzędnych (r, φ, z) przyjętym jak na rys. (1) zmiany kształtu brzegu można opisać następująco:



Rys. 1. Zmiany kształtu tarczy

Fig. 1. Changes of plate shape

$$X = X0 + g\ (r,z,a), \tag{2.1}$$

gdzie:

$X = X_0(r,z)$ - punkty należące do brzegu, którego geometrię przyjmuje się za wyjściową do procesu optymalizacji,

$X = X(r,z,a)$ - punkty należące do brzegu optymalizowanego w kolejnym kroku optymalizacji,

$g(r,z,a)$ - funkcja kształtu,

$a = (a_1 \ldots a_n)$ - parametry kształtu.

Proces optymalizacji kształtu tarczy koła kolejowego zestawu kołowego powinien zakończyć się wyznaczeniem takich cech geometrycznych koła, aby jego konstrukcja miała optymalne własności wytrzymałościowe. Jest to, przy uwzględnieniu wszystkich czynników, zadanie bardzo złożone.

Konieczność utrzymania stałej odległości pomiędzy kręgami tocznymi kół wymaga takiego kształtowania konstrukcji, aby sztywność jej była maksymalna. Na tej podstawie jako kryterium optymalizacji przyjmuje się maksimum sztywności tarczy koła, co jest równoważne [4] maksimum całkowitej energii potencjalnej ustroju. Jako funkcjonał jakości przyjmuje się więc całkowitą energię potencjalną tarczy koła:

$$J = \int_V U \, d V - \int_{S_t} T_i^* u_i \, d S_t, \tag{2.2}$$

gdzie $U = U(\varepsilon)$ jest potencjałem odkształceń określonym na obszarze V.

Przy wyznaczaniu wartości U trzeba uwzględnić złożony charakter obciążeń, jakim poddawane są kolejowe zestawy kołowe w trakcie eksploatacji.

Przy przyjętym wyżej kryterium optymalności i przy ograniczeniu na objętość tarczy koła zadanie optymalizacji kształtu tarczy można zapisać następująco:

$$\text{znaleźć} \quad J^* = \max_{x \in V} J \tag{2.3}$$

$$\text{dla} \quad V \leqslant V_0$$

Jest to równoważne zadaniu poszukiwania maksimum funkcjonału:

$$J' = J + l \cdot (V - V_0), \tag{2.4}$$

gdzie l jest mnożnikiem Lagrange'a.

Jak zostało wykazane [6], warunki konieczne istnienia poszukiwanego globalnego maksimum sztywności konstrukcji wyrażają się następująco:

$$J' = \int_{S_0^\circ} (U - l \cdot V) \delta g \, d S_0^\circ = 0 \tag{2.5}$$

gdzie S_0° jest brzegiem swobodnym wyjściowego do optymalizacji kształtu tarczy koła.

Są również spełnione warunki dostateczne istnienia maksimum [6], a zatem rozwiązanie równań (3.5) pozwoli wyznaczyć kształt charakteryzujący się najmniejszą odkształcalnością.

Sam przyrost funkcjonału jakości J można przedstawić następująco:

$$\delta J = A \cdot \delta g = \int_{S_0^\circ} U \, \delta g \, d S_0^\circ \tag{2.6}$$

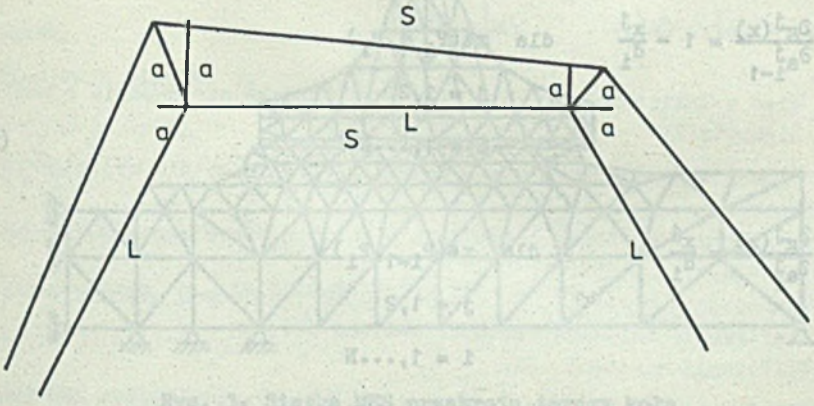
Zależność ta wyraża zmiany sztywności tarczy koła w zależności od zmian kształtu brzegu.
Wariacja δg jest wektorem wyrażającym przyrosty poszczególnych parametrów kształtu, a A jest macierzą nazywaną macierzą wrażliwości.

3. NUMERYCZNY MODEL ZADANIA ANALIZY WRAŻLIWOŚCI I OPTYMALIZACJI KSZTAŁTU TARCZY KOŁA

Algorytm numerycznego rozwiązania układu równań (2.5), a więc algorytm takiego sposobu rozwiązania zadania optymalizacji przedstawiono w pracach [1, 2].

Obecnie zostanie przedstawiony algorytm analizy wrażliwości i bazujący na nim algorytm optymalizacji kształtu tarczy koła.

Niech brzeg S_0^0 zostanie zastąpiony brzegiem odcinkowo-liniowym złożonym z N odcinków, tworzących linię ciągłą o wierzchołkach należących do brzegu S_0^0 (rys. 2.).



Rys. 2. Parametryzacja brzegu
Fig. 2. Parameters of boundary

Brzeg ten jest przekształcony w odcinkowo-liniowy brzeg S_0, ciągły i taki, że wierzchołki odcinków go tworzących leżą na kolejnej modyfikacji brzegu S .
Składowe funkcji kształtu:

$$g^i(x,a) = g_1^j(x,a) + g_2^j(x,a) + \dots + g_N^j(x,a), \tag{3.1}$$

gdzie $g_i^j(x,a)$, $j = 1,2$; $i = 1,\ldots N$ są składowymi funkcji kształtu na i-tym odcinku brzegu i mają postać:

$$g_i^j(x,a) = a_{i-1}^j + x \cdot \frac{a_i^j - a_{i-1}^j}{d_i} \qquad j = 1,2 \tag{3.2}$$

$$x\ (P_{i-1}, P_i) \qquad x = (x^1, x^2) \qquad i = 1,\ldots N$$

gdzie:

$x^1 = r$

$x^2 = z$

Parametry a_i^j, $j = 1,2$, $i = 1,\ldots N$ są składowymi wektora, o jaki przemieszcza się koniec i-tego odcinka brzegu.

Pochodne funkcji kształtu po parametrach kształtu na i-tym odcinku brzegu:

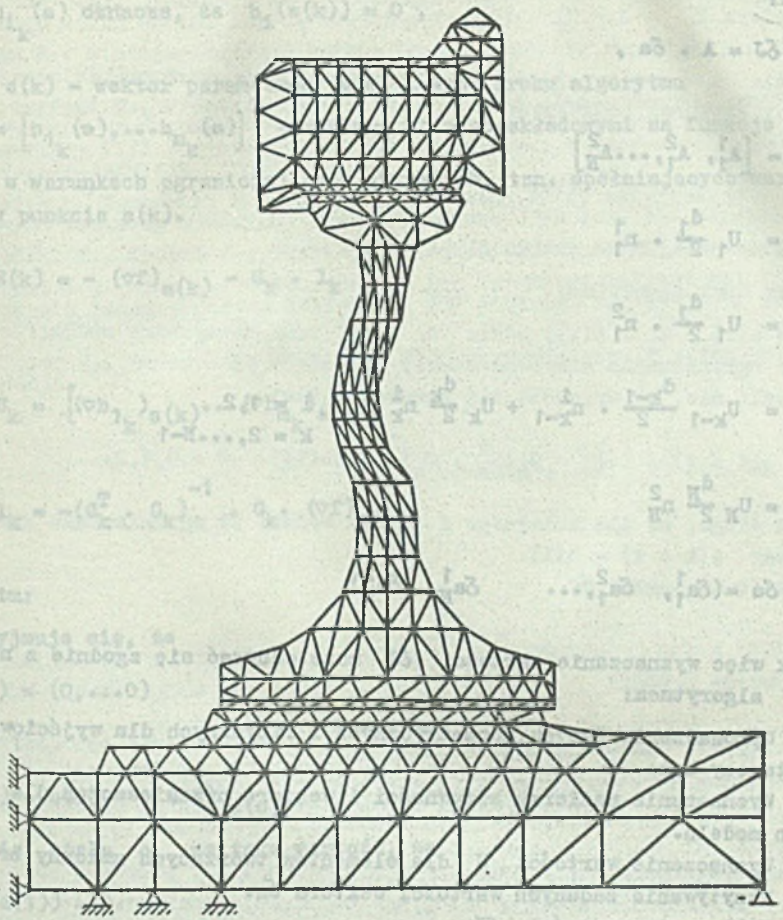
$$\frac{\partial g^j(x)}{\partial a_{i-1}^j} = 1 - \frac{x^j}{d_i} \qquad \text{dla } x \in (P_{i-1}, P_i) \quad j = 1,2 \quad i = 1,\ldots N \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial g^j(x)}{\partial a_i^j} = \frac{x^j}{d_i} \qquad \text{dla } x \in (P_{i-1}, P_i) \quad j = 1,2 \quad i = 1,\ldots N$$

Kolejnym krokiem w procesie numerycznego modelowania zadania jest wyznaczenie wartości U.
Dla ciała sprężystego, jakim jest tarcza koła kolejowego, $U = \frac{1}{2}\sigma \cdot \varepsilon$.
Składowe tensorów stanu naprężenia i odkształcenia mogą zostać wyznaczone na drodze wytrzymałościowej analizy metodą elementów skończonych [8] lub metodą elementów brzegowych [3].

Dyskretyzując przekrój tarczy izoparametrycznymi, liniowymi elementami skończonymi lub brzegowymi, automatycznie otrzymuje się opisany wyżej brzeg odcinkowo-liniowy.

Stosując MES przy liniowych funkcjach kształtu, zakłada się, że naprężenia są stałe na całym obszarze elementu i równe naprężeniom w środku ciężkości trójkąta tworzącego ten element. Można więc przyjąć, że na każ-



Rys. 3. Siatka MES przekroju tarczy koła
Fig. 3. Mesh of FEM of cut of wheel plate

dyn odcinku rozpatrywanego brzegu funkcja U będzie miała wartość wystarczająco bliską wartości U wewnątrz elementu i stałą na całej długości odcinka (rys. 3).

Przy takich założeniach i po podstawieniu (3.2) i (3.3) do (2.6) oraz odpowiednim przekształceniu otrzymuje się:

$$\delta J = \sum_{k=1}^{N} \int_{S^{\circ}_{k}} U \cdot n_k \frac{\partial g_k}{\partial a_l} dS^{\circ}_{k} \, \delta a_l , \tag{3.4}$$

a stąd:

$$\delta J = A \cdot \delta a \,, \tag{3.5}$$

gdzie:

$$A = \left[A_1^1,\ A_1^2, \ldots A_N^2\right]$$

$$A_1^1 = U_1 \frac{d_1}{2} \cdot n_1^1$$

$$A_1^2 = U_1 \frac{d_1}{2} \cdot n_1^2$$

$$A_k^i = U_{k-1} \frac{d_{k-1}}{2} \cdot n_{k-1}^i + U_k \frac{d_k}{2} n_k^i \qquad \begin{array}{l} i = 1,2 \\ k = 2,\ldots N-1 \end{array}$$

$$A_N = U_N \frac{d_N}{2} n_N^2$$

$$a \quad \delta a = (\delta a_1^1,\ \delta a_1^2, \ldots \quad \delta a_N^1,\ \delta a_N^2)$$

Tak więc wyznaczanie wartości δJ może odbywać się zgodnie z następującym algorytmem:

1. Wprowadzenie danych geometrycznych i fizycznych dla wyjściowego modelu tarczy koła.
2. Wyznaczenie macierzy sztywności i wektora przemieszczeń dla tak przyjętego modelu.
3. Wyznaczenie wartości U dla elementów tworzących zmienny brzeg.
4. Wczytywanie zadanych wartości wektora δa.
5. Wyliczanie wartości δJ.

Punkty 4 i 5 mogą być powtarzane wielokrotnie bez potrzeby powtarzania obliczeń 1-3.

Łącząc metodę analizy wrażliwości z metodą rzutu gradientu zbudowano niżej opisany algorytm optymalizacji kształtu tarczy koła.

Przyjęto następujące oznaczenia:

dla J, a, A, V zdefiniowanych jak wyżej

$f(a) = -J$ – funkcja celu

$a = (a_1, \ldots a_N)$ – wektor parametrów kształtu

$\nabla f(a) = -\left[A_1^1,\ A_1^2, \ldots A_N^1,\ A_N^2\right]$ – gradient funkcji celu.

Jego składowe są elementami macierzy wrażliwości przedstawionej powyżej.

$h_i(a) \leq 0$, $i = 1,\ldots m$ ograniczenia nałożone na parametry kształtu

$$h_{i_k}(a) \text{ oznacza, że } h_i(a(k)) = 0 , \tag{3.6}$$

gdzie $a(k)$ - wektor parametrów a w k-tym kroku algorytmu

$H_k(a) = \left[h_{1_k}(a),\ldots h_{m_k}(a)\right]^T$ - wektor, którego składowymi są funkcje występujące w warunkach ograniczających aktywnych, tzn. spełniających warunek (3.6) w punkcie $a(k)$.

$$S(k) = -(\nabla f)_{a(k)} - G_k \cdot l_k$$

gdzie:

$$G_k = \left[(\nabla h_{1_k})_{a(k)} \cdots (\nabla h_{m_k})_{a(k)}\right]$$

$$l_k = -(G_k^T \cdot G_k)^{-1} \cdot G_k \cdot (\nabla f)_{a(k)}$$

Algorytm:

1. Przyjmuje się, że

   $a(0) = (0,\ldots 0)$

   $k = 1$

   $a(1) = a(0) - c\,(\nabla f)_{a(0)}$,

   gdzie stała c_0 ma taką wartość, że

   $h_i(a(1)) = 0$.

2. Warunek zakończenia szukania:

   a. Jeżeli $s(k) = 0$ i $l_k < 0$, to należy przejść do wykonywania punktu 3.

   b. Jeżeli $s(k) = 0$ i $l_k \geq 0$,
   to $a^* = a(k)$ jest przekształceniem brzegu S_0 w brzeg optymalny.

   c. Jeżeli $s(k) \neq 0$, to należy przejść do wykonywania punktu 4.

3. Wyznaczanie nowego kierunku poszukiwań:

   Jeżeli istnieje takie i, $i = 1,\ldots m$, że

   $h_i(a(k)) = 0$, i $l_i < 0$,

   to z macierzy G_k usuwamy i-tą kolumnę.

Otrzymuje się w ten sposób macierz G_k'.

Macierz $P_k' = I - G_k' \cdot (G_k'^T \cdot G_k')^{-1} \cdot G_k'^T$

(gdzie I - macierz jednostkowa) jest macierzą rzutowania.
Nowy kierunek poszukiwań

$$s(k) = P_k' \cdot (\nabla f)_{a(k)}$$

Należy przejść do punktu 4.

4. k-ty krok algorytmu:

$b = a(k) = c_k \cdot s(k)$, gdzie c_k jest taką maksymalną stałą, że b spełnia ograniczenia nierównościowe, to $a(k+1) = b$.
Jeżeli nie, to wyznacza się rekurencyjnie

$$b(i+1) = b(i) - G_k(G_k^T \cdot G_k)^{-1} H_k(b(i)) \quad i = 0,1,2...$$

tak długo, aż dla kolejnego i $b(i)$ będzie te ograniczenia spełniać.
Wtedy $a(k+1) = b(i)$.
Powrót do punktu 2.

4. UWAGI KOŃCOWE

W artykule opisano algorytmy numerycznego rozwiązania osiowosymetrycznego zadania analizy wrażliwości i optymalizacji kształtu tarczy. Programy oparte na tych algorytmach są obecnie uruchamiane na mikrokomputerze IBM PC/XT.

Można oczekiwać, że zakończy się to powodzeniem, ponieważ udało się już uruchomić analogiczny program analizy wrażliwości kształtu w zakresie płaskiego zadania teorii sprężystości.

LITERATURA

[1] Bak R., Mrówczyńska B.: Kryteria i algorytm optymalizacji tarczy koła kolejowego zestawu kołowego. "Materiały IV Konferencji "Nauka i praktyka w transporcie", Warszawa 1985.

[2] Prace naukowo - badawcze Instytutu Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn Pol. Śl. "Algorytm Optymalizacji", Temat 1.5. Problem węzłowy PAN 05,12, NB-305/RMK/81, Gliwice 1983 r.

[3] Prace naukowo-badawcze Instytutu Transportu Pol. Śl.: "Zastosowanie metody brzegowych równań całkowych do konstruowania kolejowych zestawów kołowych". Temat 1.5, Problem Węzłowy PAN 05.12, NB-305/TMK/81, Katowice 1985.

[4] Brandt A.: Kryteria i metody optymalizacji konstrukcji. PWN, Warszawa 1977.

[5] Crouch S.L., Starfield A.M.: Boundary Methods in Solid Mechanics. George Allen Unwin, London-Boston-Sydney, 1983.

[6] Dems K.: Wieloparametrowa optymalizacja kształtu konstrukcji. ZN Politechniki Łódzkiej, zeszyt 371, Łódź 1980.

[7] Burczyński T., Mrówczyńska B.: Zastosowanie elementów brzegowych i elementów skończonych w analizie wrażliwości kształtu konstrukcji. Materiały VIII Konferencji Metody Komputerowe w Mechanice Konstrukcji, Warszawa-Jadwisin 1987.

[8] Grajek K., Zacharski M.: Metoda numerycznej oceny wytrzymałości kolejowych zestawów kołowych. Praca doktorska JPKM Pol. Śl. Gliwice 1979.

[9] Osiński Z., Wróbel J.: Teoria konstrukcji maszyn. PWN, Warszawa 1982.

[10] Raquet E., Tacke G.: Unterschungen zur Spurmasstabilitat bei Radsatzen mit klozgebremsten Vollräden. ZEV - Glass. Aun 99/1975 Nr 11, s. 311-316.

[11] Seidler J., Badach A., Molin W.: Metody rozwiązywania zadań optymalizacji.

Recenzent: Prof. dr hab. Jan BROŚ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЧУВСТВИТЕЛЕНОГО АНАЛИЗА В ПРОЕКТИРОВАНИИ ФОРМЫ ДИСКА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО КОЛЕСА

Р е з ю м е

В етатье описано применение чувствительного анализа и оптимизации в проектировании диска железнорожного колеса. Во вступлении сформулирована задача оптимизации формы диска с учетом ограничении по обьему. Сформулировано необходимые условия существования искомого экстремума. Сформупирована была также задача чувствительного анализа дла исследования изменения жесткости диска колеса в зависимости от форма края. Показана номерная модель задачи чувствительного анализа и алгоритм ее решения. Статья содержит также алгоритм оптимизации диска колеса. Применен в нем метод проекции градиента для определения градиента функционала качества использован представленный раньше алгоритм получения матрицы чувствительности.

AN APPLICATION OF A SENSITIVITY ANALYSIS TO DESIGNIG SHAPE OF RAILWAY WHEEL

S u m m a r y

This paper describes an aplication of a sensitivity analysis and optymisation to designing a wheel plate. At the begining there was formulated an aim of optymisation of shape of wheel plate, where a limit was its volume.

A necessary condition of existing of searched extremum has been presented. A problem of a sensitivity analys for serching variation of stiffnes wheel plate has been formulated as a function of shape of boundary.

Next there was presented a numerical model of a sensitivity analysis and an algorithm of solution.

An algorithm of optimisation of wheel plate was presented too. There was applied method of projection of gradient. The algorithm of reciving sensitivity matrix which has been presented earlier was used for determination gradient of quality function.