

Wojciech BLAJER, Andrzej MARKIEWICZ
Wyższa Szkoła Inżynierska w Radomiu

MODELOWANIE DYNAMIKI PŁASKICH UKŁADÓW WIELOCZŁONOWYCH Z TARCIEM

Streszczenie. Praca dotyczy generowania równań ruchu układów wieloczłonowych z uwzględnieniem efektów tarcia. Połączenia członów traktuje się jako więzy nieidealne, demonstrując przykłady modelowania ich reakcji. Równania ruchu otrzymuje się w formie nieliniowo sprzężonych równań różniczkowo-algebraicznych, typu równań Lagrange'a I rodzaju, względem absolutnych prędkości i położenia członów oraz reakcji w przegubach. Dyskutowana jest specyficzna struktura tych równań.

MODELLING OF DYNAMICS OF FRICTION-AFFECTED PLANAR MULTIBODY SYSTEMS

Summary. The problem of obtaining equations of motion for friction-affected multibody systems is considered. The joints are treated as nonideal constraints, and some examples of modelling of reactions of the constraints are demonstrated. Nonlinearly coupled differential-algebraic equations of motion in the absolute state variables and the joint reactions, referenced to as Lagrange's equations of type I, are obtained. A specific structure of the equations is discussed.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПЛОСКИХ МНОГОЧЛЕННЫХ СИСТЕМ С ТРЕНИЕМ

Резюме. Работа касается генерирования уравнений движения много-членной систем с учетом эффектов трения. Соединения членов системы приняты за неидеальные связи. Представлены примеры моделирования их реакций. Уравнения движения получены в форме дифференциально-алгебраических уравнений, типа уравнений Лагранжа I порядка.

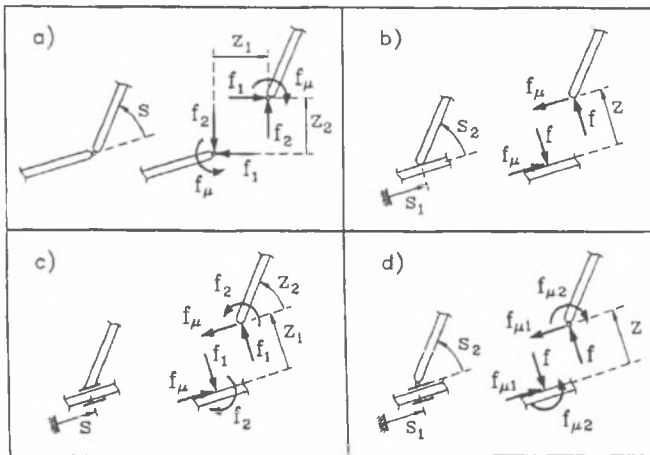
1. WSTĘP

Więzy nakładane na układ mechaniczny modelowane są zwykle jako *idealne* (= bez tarcia). Postulatywnie, reakcje więzów idealnych są ortogonalne do powierzchni więzów i nie mają wpływu na ruch wirtualny ("wzdłuż" więzów) układu. Nie występują tym samym w równaniach ruchu w zmiennych niezależnych, co wykorzystuje większość metod mechaniki

analitycznej. Stosowanie tych metod przy generowaniu równań ruchu układów z tarcieniem jest więc często niemożliwe lub co najmniej trudne. Wymusza to też naturalną tendencję do pomijania efektów tarcia, podważając wiarygodność analiz matematycznych i poprawność budowanych praw sterowania dla rzeczywistych mechanizmów i maszyn.

Złożoność opisu matematycznego oraz sprzężenia ruchu układu z (nieidealnymi) reakcjami w przegubach powodują, że problemy modelowania i analizy układów z tarcieniem są rzadko podejmowane w literaturze. Nieliczne opracowania w tym zakresie, m.in. [1-4], kładą zaledwie podwaliny dla budowy efektywnych metod badania tych zagadnień. Niniejsza praca jest kolejną próbą wypracowania takiej metody.

Układ "rozbija" się na swobodne człony i łączy je więzami połączeń między nimi i z otoczeniem. Uwzględniając efekty tarcia, nieidealne reakcje tych więzów modeluje się w bazach lokalnych poszczególnych połączeń, a następnie rzutuje do przestrzeni konfiguracji układu uwolnionego od więzów. Otrzymuje się różniczkowo-algebraiczne równania ruchu, typu równań Lagrange'a I rodzaju, względem absolutnych prędkości i położenia układu oraz reakcji w przegubach. Nietrywialnym spostrzeżeniem pracy jest fakt, że składowa nieidealna (wywołana tarcieniem) uogólnionej reakcji więzów nie musi być styczna do powierzchni więzów (co obowiązuje dla prostego modelu tarcia coulombowskiego). Składowa nieidealna może być reprezentowana nie tylko w podprzestrzeni stycznej do więzów (efekt podstawowy), ale i ortogonalnej. Wywołuje to dodatkowe sprzężenia pomiędzy ruchem układu i reakcjami w przegubach, zasadniczo utrudniając formułowanie równań ruchu w zmiennych niezależnych oraz analizę numeryczną tych równań.



Rys.1. Przykłady reakcji w połączeniach mechanizmów płaskich
Fig.1. Examples of reactions in some joints of plane mechanisms

2. WIĘZY POŁĄCZEŃ I ICH REAKCJE

Ruch członów układu krępowany jest więzami połączeń. Więzy te oraz ich reakcje wygodnie jest zamodelować przy użyciu współrzędnych lokalnych danego połączenia,

definiujących: z - kierunki skrępowania oraz s - kierunki ruchu. Kierunkom skrępowania odpowiadają składowe idealne reakcje więzów f , kierunkom ruchu - składowe nieidealne f_{μ} wywołane efektami tarcia. W przypadku układów płaskich sumaryczna ilość składowych z i s (oraz f i f_{μ}) dla danego połączenia jest równa 3. Gdy więzy połączeń są dwustronne, ich równaniami są $z = 0$. Momenty tarcia $f_{\mu r}$ w przegubach walcowych ($s = \omega$) oraz siły tarcia $f_{\mu t}$ w suwakach ($s = v$) modeluje się zwykle w funkcji reakcji idealnych f i prędkości s [1-4]:

$$f_{\mu r} = -\text{sign}(\omega) \mu_r(\omega) d \sqrt{f_x^2 + f_y^2}; \quad f_{\mu t} = -\text{sign}(v) \mu_t(v) |f_n|, \quad (1)$$

gdzie d jest średnicą czopa, μ_r i μ_t są współczynnikami tarcia odpowiednio obrotowego i ślizgowego, f_x i f_y oraz f_n są reakcjami idealnymi, a znak "-" oznacza, że $f_{\mu r}$ i $f_{\mu t}$ mają zwroty przeciwne do odpowiadających współrzędnych s . W uproszczonych modelach współczynniki μ_r i μ_t przyjmowane są często jako stałe. Dla małych prędkości względnych, a szczególnie dla przegubów walcowych, współczynniki tarcia zależą jednak istotnie od [1-6]. Dla połączeń z rys.1 siły i momenty tarcia zamodelowano następująco:

$$f_{\mu} = -\text{sign}(\dot{y}) \mu_r(\dot{y}) d \sqrt{f_1^2 + f_2^2}, \quad (2a)$$

$$f_{\mu} = -\text{sign}(\dot{y}_1) \mu_r(\dot{y}_1) |f|, \quad (2b)$$

$$f_{\mu} = -\text{sign}(\dot{y}) \mu_r(\dot{y}) |f_1|, \quad (2c)$$

$$f_{\mu 1} = -\text{sign}(\dot{y}_1) \mu_r(\dot{y}_1) |f|, \quad f_{\mu 2} = -\text{sign}(\dot{y}_2) \mu_r(\dot{y}_2) d \sqrt{1 + \mu_1^2} |f|, \quad (2d)$$

Komentarza wymaga również zagadnienie tarcia spoczynkowego, związanego z chwilowym "zacieraniem" się przegubów przy zmianie kierunku ruchu względnego lub występującego podczas uruchamiania mechanizmu (chwilowo). Wiąże się to z powszechnie znanym zjawiskiem skokowego wzrostu współczynnika tarcia, co nie jest jednak łatwe do zalgorytmizowania numerycznego. Jednym ze sposobów rozwiązania problemu jest włączenie chwilowo do z tych współrzędnych spośród s , których pochodne są równe (bliższe) zeru. Będzie to równoznaczne z nałożeniem dodatkowych więzów na układ, których reakcje wyznaczane będą jak dla klasycznych więzów kontaktowych. Wielkości tych reakcji nie mogą jednak przekroczyć pewnych wartości granicznych, odpowiadających maksymalnym siłom tarcia spoczynkowego (określonym przez bezwzględne wartości wyrażen z równań (1) i (2) po zastąpieniu $\mu_r(\omega)$ i $\mu_t(v)$ odpowiednimi współczynnikami

tarcia spoczynkowego). Po osiągnięciu przez siły tarcia wartości granicznych więzy "puszczą" i odpowiadający kierunek znów będzie kierunkiem ruchu. Zauważmy na koniec, że opisany proces nakładania więzów *zatarcia* i ich zanikania w wyniku wzrostu wartości ich reakcji powyżej poziomu maksymalnych sił tarcia statycznego, można łatwo zalgorytmizować numerycznie. W wyniku skokowych zmian wartości współczynnika tarcia przebiegi symulowanego ruchu cechować się będą pewnymi nieciągłościami.

3. RÓWNANIA RUCHU

Z racji nieidealności więzów, wyjściowe równania ruchu najwygodniej jest sformułować w współrzędnych absolutnych $x = [x^1, y^1, \phi^1, \dots, x^N, y^N, \phi^N]^T$, gdzie x^i i y^i oraz ϕ^i są współrzędnymi położenia dowolnego punktu (najczęściej środka masy) oraz współrzedną kątową i -tego członu ($i = 1, \dots, N$) względem jednego inercjalnego układu odniesienia, a N jest liczbą członów. Równania te zapisać można w następujący zwarty sposób:

$$M(x)\ddot{x} = h(\dot{x}, x, t) + r \quad (3)$$

$$0 = \Phi(x), \quad (4)$$

gdzie $M = \text{diag}(M^1, \dots, M^N)$, $h = [h^{1T}, \dots, h^{NT}]^T$ są złożeniami macierzy mas i prawych stron równań ruchu dla poszczególnych członów swobodnych (ogólną postać równań $M^i \ddot{x}^i = h^i$ przytoczono w Dodatku), $\Phi(x) = 0$ jest kolumnową reprezentacją m równań więzów połączeń członów, $m < n = 3N$, natomiast r oznacza uogólnioną siłę reakcji więzów w n -wymiarowej przestrzeni konfiguracji X , w której układ reprezentowany jest jako punkt, a równania więzów (4) jako uogólniona powierzchnia [7,8].

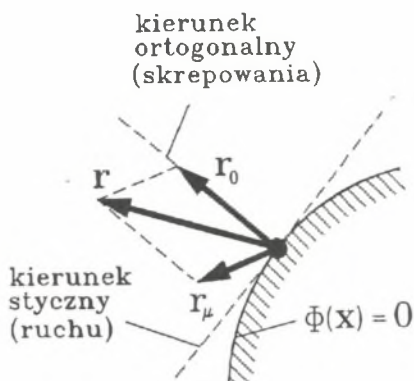
Dla danego połączenia współrzędne lokalne z i s wyrazić można za pomocą współrzędnych absolutnych kontaktujących się ciał. Zależności te można zapisać ogólnie jako:

$$z = \Phi(x) = 0, \quad (5)$$

$$s = \Psi(x), \quad (6)$$

gdzie oraz $z = [z_1, \dots, z_n]^T$ oraz $s = [s_1, \dots, s_k]^T$ są współrzędnymi skrępowania i ruchu dla całego układu. Dla układów otwartych (o strukturze drzewa) k jest równe liczbie stopni swobody układu, $k = n - m$, a dla układów zamkniętych (mechanizmów) $k > n - m$. Możliwe jest stworzenie biblioteki zależności (5) i (6) dla typowych połączeń płaskich

układów wieloczłonowych. Przykłady takich zależności pokazane zostaną podczas prezentacji referatu.



Rys.2. Ideowa ilustracja składowej idealnej i nieidealnej reakcji więzów
Fig.2. Notional illustration of ideal and nonideal components of constraint reaction

Równania (5) i (6) pozwalają na utworzenie macierzy więzów C , specyfikującej w X kierunku z (gradienty więzów), oraz macierzy C_μ , definiującej w X kierunku s ,

$$C(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad C_\mu(x) = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (7)$$

o wymiarach odpowiednio $n \times m$ i $n \times k$. Macierze C i C_μ transformują fizyczne siły reakcji więzów, f oraz f_μ , do przestrzeni X . Umożliwia to sformułowanie uogólnionej siły reakcji więzów w X ,

$$r(\dot{x}, x, f) = r_0 + r_\mu = Cf + C_\mu f_\mu, \quad (8)$$

gdzie $r_0 = Cf$ i $r_\mu = C_\mu f_\mu$ są odpowiednio składową idealną i nieidealną (wywołaną tarcieniem) uogólnionej reakcji więzów r .

4. DYSKUSJA

Uwzględniając powyższe zależności, równania ruchu (3) i (4) zapisać można w formie:

$$\dot{x} = v \quad (9)$$

$$M(x)\dot{v} = h(v, x, t) + C(x)f + C_\mu(x)f_\mu(v, f), \quad (10)$$

$$C^T(x)\dot{v} = g(v, x), \quad (11)$$

gdzie $g = -C^T v$. Równanie (11) jest dwukrotnie zróżniczkowaną formą równań więzów (4). Równania powyższe stanowią układ $2n+m$ równań różniczkowo-algebraicznych (RRA) względem v , x i f , typu równań Lagrange'a I rodzaju. Nieidealna składowa reakcji więzów powoduje, że równań tych nie można przekształcić do postaci uwolnionej od reakcji więzów (typu równań Lagrange'a II rodzaju), co jest zawsze możliwe dla układów z więzami idealnymi ($f_\mu \equiv 0$) [7,8]. Są dwie tego przyczyny. Pierwsza jest oczywista i wynika z nieliniowej, w ogólnym przypadku, zależności f_μ od f . Gdyby zależność ta była liniowa, co obowiązuje tylko dla prostych modeli tarcia ślizgowego, reakcję więzów można by zapisać jako $r = (C + \mu C_\mu)f$ i użyć zmodyfikowanej techniki projekcyjnej celem eliminacji tej reakcji z równań ruchu. Technikę taką opisano w pracy [9]. Nie stosuje się ona jednak do przypadku ogólnego rozważanego w tej pracy. Drugą przyczyną nieliniowych sprzężeń RRA (9)(11) ma charakter "geometryczny". Mianowicie, składowe r_0 i r_μ nie są do siebie ortogonalne w X , choć są wzajemnie ortogonalne siły/momenty reakcji więzów f i f_μ w klasycznym rozumieniu przestrzeni fizycznych poszczególnych punktów skrępowania. Ponieważ X jest przestrzenią metryczną [8], warunek nieortogonalności r_0 i r_μ zapisać można następująco:

$$r_0^T M^{-1} r_\mu \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad C^T M^{-1} C_\mu \neq 0 \quad (12)$$

Geometryczna ilustracja powyższego stwierdzenia prezentowana jest na rys.2, a o jego słuszności można się przekonać analizując szereg prostych przykładów. Nieortogonalność r_0 i r_μ ma daleko idące konsekwencje w sposobach analizy numerycznej RRA (9)(11), o czym będzie mowa bardziej szczegółowo podczas prezentacji referatu.

DODATEK

Równania ruchu swobodnego ciała sztywnego we współrzędnych absolutnych x , y i ϕ , gdzie x i y są współrzędnymi położenia dowolnego punktu A ciała w kartezjańskim układzie inercyjnym Oxy , a ϕ jest kątem między osią Ox i odcinkiem łączącym punkt A ze środkiem masy C , mają następującą postać [8]:

$$M(x)\ddot{x} = \begin{bmatrix} m & 0 & -m\rho\sin\phi \\ 0 & m & m\rho\cos\phi \\ -m\rho\sin\phi & m\rho\cos\phi & J_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x + m\phi^2\rho\cos\phi \\ F_y + m\phi^2\rho\sin\phi \\ M_A \end{bmatrix} = h(\dot{x}, x, t) \quad (DI)$$

gdzie m jest masą ciała, J_A jego momentem bezwładności względem A , ρ jest odległością pomiędzy punktami A i C , F_x i F_y oraz M_A są składowymi (w układzie Oxy) sumy sił działających na ciało oraz momentem tych sił względem A . Dopuszcza się zależność siły F i momentu M_A od czasu t . Równania te upraszczają się, gdy punkt A pokrywa się z C ($\rho \equiv 0$).

LITERATURA

- [1] Haug E.J., Wu S.C., Yang S.M.: Dynamics of mechanical systems with Coulomb friction, stiction, impact, and constraint addition-deletion: I - Theory, Mechanism and Machine Theory, Vol.21, No.5, 1986, pp.401-406.
- [2] Wu S.C., Yang S.M., Haug E.J.: Dynamics of mechanical systems with Coulomb friction, stiction, impact, and constraint addition-deletion: II - Planar systems; III - Spatial systems, Mechanism and Machine Theory, Vol.21, No.5, 1986, pp.407-425.
- [3] Klepp H.J.: Stopping check for systems with friction-affected constraints, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM), Vol.72, No.11, 1992, pp.539-548.
- [4] Dupont P.E.: The effect of friction on the forward dynamics problems, International Journal of Robotics Research, Vol.12, No.2, 1993, pp.164-179.
- [5] Armstrong-Hloubvy B., Dupont P., Canudas de Wit C.: A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction, preprint 1994.
- [6] De Silva C.W., McFarlane A.G.J.: Knowledge based control with application to robots, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [7] Blajer W.: A projection method approach to constrained dynamic analysis, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.59, No.3, 1992, pp.643-649.

- [8] Blajer W.: Metoda projekcyjna - teoria i zastosowania w badaniu nieswobodnych układów mechanicznych, Wyd. WSI Radom, Radom, 1994.
- [9] Blajer W.: Index of differential-algebraic equations governing the dynamics of constrained mechanical systems, Applied Mathematical Modelling, Vol.16, No.2, 1992, pp.70-77.

W przypadku pierwszego autora, praca wykonana została częściowo w ramach grantu KBN nr 3 0955 91 01.

Recenzent: prof. dr hab. inż. A. Olędzki

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1994 r.