

Katarzyna CABAŃSKA
Wydział Matematyki i Techniki
WSP Bydgoszcz

WSPÓLPRACA BELKI BERNOULLIEGO Z OŚRODKIEM SPRĘŻYSTYM O NIEJEDNORODNYCH PARAMETRACH

Streszczenie. W pracy przedstawiono problem wzajemnego zginania, skręcania i ściskania belki Bernoulliego w niejednorodnym ośrodku sprężystym. W tym ośrodku występuje odpór normalny do konturu przekroju poprzecznego belki, odpór styczny do tego konturu i wzdłużny odpór styczny między ośrodkiem i belką. Model matematyczny opisano układem sprzężonych czterech równań różniczkowych.

MATING OF BERNOULLI'S BEAM WITH THE NON-HOMOGENEOUS ELASTIC MEDIUM

Summary. In this paper a mutual influence of a bending, a torsion and an axial compression of Bernoulli beam dipped in the non-homogeneous elastic medium is presented. In this medium occurring the normal interaction to the contour of a cross-section of the beam, the tangential interaction to this contour of the beam, the longitudinal tangential interaction between this medium and the beam. The mathematical model of the system of coupled four differential equations are described.

СОТРУДНИЧЕСТВО БАЛКИ БЕРНОУЛЛЕГО С УПРУГОЙ СРЕДОЙ С НЕОДНОРОДНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Резюме. В работе представлено задачу взаимного сгибания, скручивания и сжимания балки Берноуллего среды. В этой среде выступает отпор нормальный и касательный к контуру поперечного сечения балки а также продольный отпор касательный к обочине балки. Математический модель описано системой связи четырёх дифференциальных уравнений.

1. WSTĘP

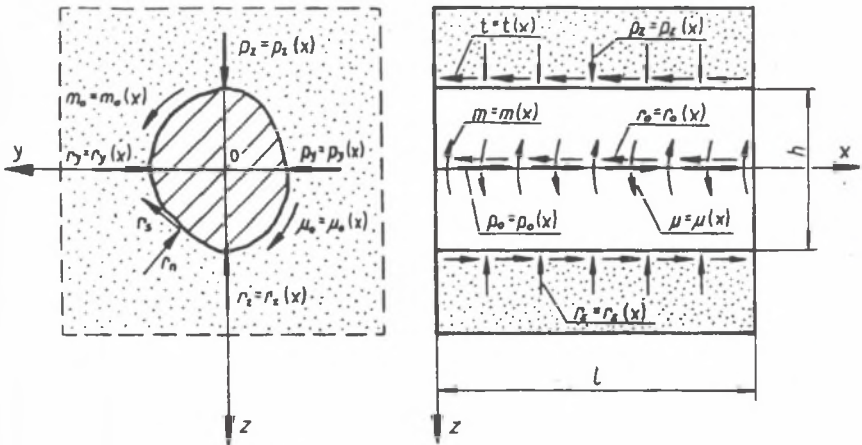
W różnych urządzeniach technicznych, maszynach, budowlach poszczególne elementy współpracują ze sobą. Najprostszym przypadkiem zanurzenia konstrukcji w ośrodku sprężystym jest utwierdzenie części belki np. w murze, fundamencie lub korpusie maszyn. Wieńce stropowe można rozpatrywać jako belki zanurzone całkowicie w ośrodku sprężystym.

W pracy J. Obrębskiego [3] zajęto się dynamiką belki zanurzonej w trójkierunkowym sprężystym ośrodku typu Winklera. W pracy Z. Wasiutyńskiego, S. Zagrodzkiego, W. Marksa [4] dokonano analizy zginania pali. Natomiast w pracy K. Cabańskiej [1] rozwiązano problem wzajemnego wpływu zginania i skręcania belki zanurzonej w jednorodnym, dwuparametrowym ośrodku sprężystym.

W pracy przedstawiono belkę Bernoulliego otoczoną na całej jej poboczniczy niejednorodnym, trójparametrowym ośrodkiem sprężystym. Celem pracy jest wprowadzenie równań różniczkowych opisujących wzajemny wpływ zginania, skręcania i ściskania belki zanurzonej w tym ośrodku.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Fizycznym modelem jest belka Bernoulliego zanurzona w trójparametrowym, niejednorodnym ośrodku sprężystym (rys. 1). Belkę o długości l obciążono siłami działającymi w płaszczyznach głównych belki $p_x(x)$, $p_y(x)$, momentami działającymi w płaszczyznach głównych belki $m_x(x)$, $m_y(x)$, momentem $m_z(x)$ działającym dookoła osi geometrycznej belki i siłą działającą wzdłuż osi belki $p_o(x)$.



Rys. 1. Schemat obciążenia belki w ośrodku sprężystym
Fig. 1. The scheme of a load of the beam in the elastic medium

Założono, że belka jest w stałym kontakcie z ośrodkiem, tzn., że oprócz tego, że nie występuje szczelina między belką o ośrodkiem, to również nie występuje między nimi poślizg. Belka zanurzona w ośrodku sprężystym i znajdująca się pod wpływem obciążenia ulega odkształceniu, a to odkształcenie powoduje oddziaływanie tego ośrodka na belkę. Oddziaływanie to przejawia się odporem poprzecznym $r_x(x)$, $r_y(x)$ oraz wzdłużnym odporem stycznym $t(x)$ do powierzchni belki i jednocześnie równoległym do jej osi (rys. 2). Odpór poprzeczny jest wypadkową odporu normalnego r_n do tego konturu przekroju poprzecznego belki i odporu stycznego r_t do tego konturu (rys. 1). W efekcie obciążeń zewnętrznych i odporów występuje zginanie w płaszczyznach głównych belki, skręcanie i ściskanie belki.

3. MODEL MATEMATYCZNY PROBLEMU

Zjawisko zginania [2], skręcania i ściskania belki o niejednorodnych parametrach w dwóch kierunkach zanurzonej w sprężystym ośrodku opisano następującym układem równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} EJ_y \frac{d^4 w}{dx^4} &= p_x - \frac{dm_x}{dx} - r_x + \frac{d\mu_x}{dx}, \\ EJ_z \frac{d^4 v}{dx^4} &= p_y - \frac{dm_y}{dx} - r_y + \frac{d\mu_y}{dx}, \\ EF \frac{d^2 u}{dx^2} &= p_o - r_o, \\ GJ_x \frac{d^2 \varphi}{dx^2} &= m_o - \mu_o, \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie: $w(x)$, $v(x)$ - przemieszczenie belki w płaszczyznach głównych I_x , I_y - momenty bezwładności powierzchni przekroju poprzecznego względem odpowiednich głównych osi centralnych, $r_x(x)$, $r_y(x)$ - odpory poprzeczne w płaszczyznach głównych $\mu_x(x)$, $\mu_y(x)$ - momenty odporowe działające w płaszczyznach głównych belki, $\varphi(x)$ - kąt skręcenia belki, I_x - zastępczy moment bezwładności powierzchni przekroju belki na skręcanie, $\mu_o(x)$ - moment odporowy względem osi geometrycznej x , F - pole przekroju poprzecznego belki, $r_o(x)$ - odpór osiowy w kierunku osi x , E - moduł Younga, G - moduł Kirchoffa.

Po wprowadzeniu wzorów na $\mu_x(x)$, $\mu_y(x)$, $r_x(x)$, $r_y(x)$, $\mu_o(x)$, $r_o(x)$ i wstawieniu do układu równań (1) otrzymano układ czterech liniowych, sprzężonych, niejednorodnych równań różniczkowych w formie:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \lambda_1 \frac{d^2 w}{dx^2} - I_1 \frac{d^2 v}{dx^2} + s_1 \frac{du}{dx} + a_1 w + b_1 v + c_1 \varphi + f_1(x)$$

$$\frac{d^4 v}{dx^4} - \lambda_2 \frac{d^2 v}{dx^2} - I_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + s_2 \frac{du}{dx} + a_2 v + b_2 w + c_2 \varphi + f_2(x) \quad (2)$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - s_3 \frac{dw}{dx} + s_4 \frac{dv}{dx} + a_3 u = f_3(x)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + a_4 \varphi + b_4 w + c_4 v = f_4(x),$$

gdzie:

$$f_1(x) = \frac{1}{EJ_y} (p_z - \frac{dm_z}{dx}), \quad f_3(x) = \frac{1}{EF} p_o$$

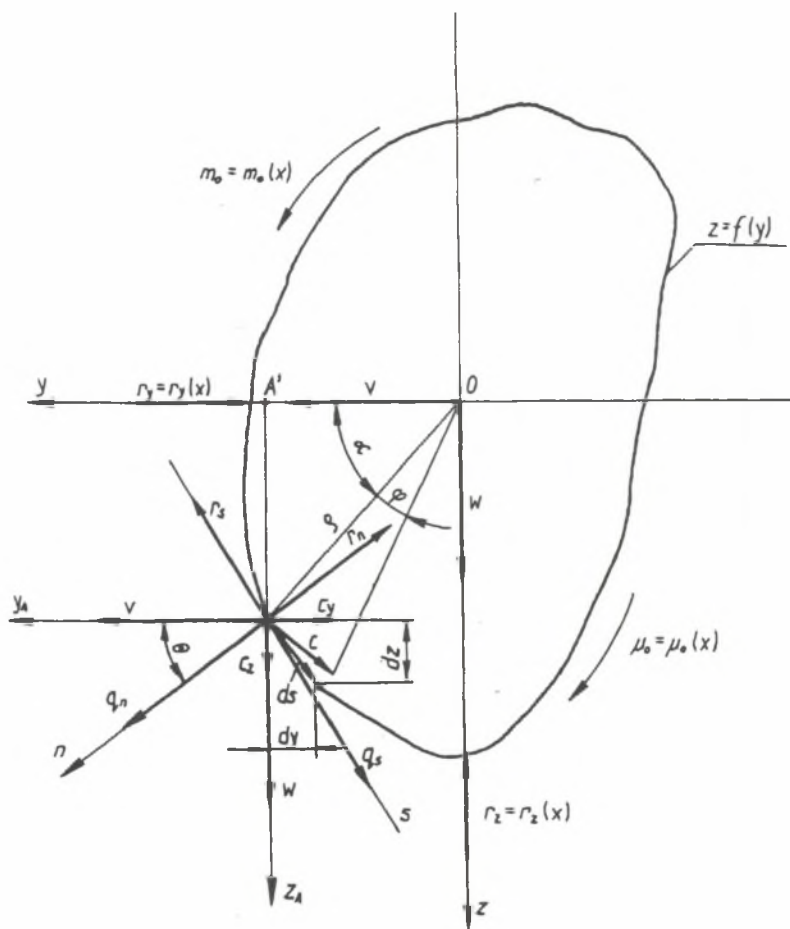
$$f_2(x) = \frac{1}{EJ_z} (p_y - \frac{dm_y}{dx}), \quad f_4(x) = \frac{1}{GJ_x} m_o$$

$$\lambda_1 = \frac{L_y}{EJ_y}, \quad I_1 = \frac{L_{yz}}{EJ_y}, \quad s_1 = \frac{S_y}{EJ_y}, \quad s_3 = \frac{S_y}{EF},$$

$$\lambda_2 = \frac{L_z}{EJ_z}, \quad I_2 = \frac{L_{yz}}{EJ_z}, \quad s_2 = \frac{S_z}{EJ_z}, \quad s_4 = \frac{S_z}{EF},$$

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, a_4, b_4, c_4$ - stałe współczynniki, które zależą od $\chi_a, \chi_o, \rho, \Theta, \alpha, L_y, L_z$ - momenty bezwładności niejednorodnego konturu przekroju belki odpowiednio względem głównych osi centralnych;

L_{yz} - moment dewiacji niejednorodnego konturu przekroju belki względem głównych osi centralnych, S_y, S_z - momenty statyczne niejednorodnego konturu przekroju belki odpowiednio względem głównych osi centralnych $\chi_o = \chi_o(y, z)$ - zmienny moduł sztywności normalny ośrodka sprężystego $\chi_o = \chi_y(y, z)$ - zmienny moduł stycznego ośrodka sprężystego. Niejednorodny kontur przekroju spowodowany jest zmienną "gęstością" χ_a .



Rys. 2. Schemat składowych odporu poprzecznego oraz składowych odporu normalnego i stycznego
 Fig. 2. The scheme of components of the transversal interaction as well as the normal and tangential interaction

4. PODSUMOWANIE

W pracy wyprowadzono sprzężony układ czterech równań różniczkowych, który opisuje zjawisko zachowania się belki w trójparametrowym, niejednorodnym ośrodku sprężystym. Ze sprzężenia równań różniczkowych (2) parametrami w , v , u , φ wynika wzajemny wpływ zginania, skręcania i ściskania belki zanurzonej w tym ośrodku. Sprzężenie to występuje w przekrojach o dowolnym kształcie.

LITERATURA

- [1] Cabańska K.: Wzajemny wpływ zginania i skręcania belki zanurzonej w dwuparametrowym ośrodku sprężystym. Prace IPPT, z. 8, Warszawa 1993
- [2] Nowacki W.: Mechanika budowli, t. 3. PWN, Warszawa 1975
- [3] Obrębski J.B.: Cienkościenne sprężyste pręty proste. WPW, Warszawa 1991
- [4] Z. Wasiutyński, S. Zagrodzki, W. Marks: Mosty na podporach z pali betonowych. PWN, Warszawa 1963, s. 94 - 108

Recenzent: prof dr hab. inż. A. Tylikowski

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1994 r.