ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995

Seria: MECHANIKA z. 122 Nr kol. 1267

Andrzej ICHA
Zakład Dynamiki Morza
Instytut Oceanologii PAN, Sopot

WIDMOWE CHARAKTERYSTYKI STRATYFIKOWANYCH PRZEPŁYWÓW TURBULENTNYCH Z GRADIENTEM PRĘDKOŚCI

Streszczenie. W pracy rozważono półempiryczne, spektralne równanie bilansu energii kinetycznej turbulencji *E(k)* w stratyfikowanym termicznie i zasoleniowo przepływie turbulentnym z gradientem prędkości. W celu opisu bezwładnościowego mechanizmu przenoszenia energii przez kaskadę wirów wykorzystano hipotezy Pao i Kovasznay'a. Otrzymano analityczne wyrażenia dla widma energii *E(k)* przy założeniu słabego odziaływania pomiędzy polami średnim i pulsacyjnym.

SPECTRAL CHARACTERISTICS OF STRATIFIED TURBULENT FLOWS WITH SHEAR

Summary. In this paper a semi-empirical model is proposed to solve the spectral equation for the balance of turbulent kinetic energy *E(k)* in a thermally and salt-stratified turbulent shear flow. For the terms representing inertial transfer of turbulent energy through the hierarchy of eddies, Pao's and Kovasznay's formulations are employed. The analytical expressions for *E(k)* are obtained for the case when interaction between the mean and turbulent fields is weak.

СПЕКТРАЛНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ТЕЧЕНИЙ СО СДВИГОМ

Резюме. В работе представлено полуэмпирическое спектральное уравниение баланса кинетической энергии турбулентности *E(k)* в стратифицированным по температуре и солености потоке со сдвигом. Для описания инерциального перераспрелеления турбулентной энергии по иерархии вихрей, использовано гипотези Пао и Коважного. Получено аналитические выражения дла спектра энергии *E(k)* в случае слабого взаимодействия между основным и турбулентным полями скорости.

1. WSTĘP

W wielu problemach geofizycznych zasadnicze znaczenie posiadają stratyfikowane przepływy turbulentne, tzn. niejednorodne gęstościowo przepływy zachodzące w polu siły ciężkości [1], [2]. W przypadku atmosfery stratyfikacja ośrodka jest uwarunkowana głównie niejednorodnością pola temperatury $T(x,t)$, natomiast w przypadku przepływów oceanicznych porównywalny wkład do stratyfikacji gęstościowej wnoszą pola - temperatury $T(x,t)$ oraz zasolenia $s(x,t)$. Szczególnie interesujące i ważne z praktycznego punktu widzenia są przypadki, w których przepływ turbulentny ma miejsce w warstwie ścinającej i w której lepkie i turbulentne naprężenia styczne współistnieją z dużym poziomym gradientem prędkości średniej $d\bar{u}/dz$ (np. w strefie oddziaływania morza i atmosfery).

W dalszym ciągu ograniczymy się do sytuacji, w której dany ośrodek (woda morska) charakteryzuje się stabilnym rozkładem gęstości $\rho = \rho(T,s)$ i rozpatrzymy przypadek statystycznie stacjonarnego i horyzontalnie jednorodnego przepływu turbulentnego z poziomym gradientem prędkości $d\bar{u}/dz$ = const. Wiadomo, że występowanie gradientu prędkości średniej w przepływie zwiększa jego niestabilność i odgrywa rolę "generatora" turbulencji. Z kolei, stabilna stratyfikacja ośrodka powoduje, że część energii kinetycznej turbulencji pod wpływem pracy siły wyporu przechodzi w energię potencjalną przepływu. Uwzględnienie tych mechanizmów wymaga sformułowania teorii stratyfikowanych przepływów turbulentnych z gradientem prędkości.

W niniejszej pracy rozważymy jeden z możliwych wariantów realizacji tego zadania w ramach tzw. spektralnej (widmowej) teorii turbulencji. Celem pracy jest otrzymanie nowych analitycznych rozwiązań dla widma energii kinetycznej turbulencji $E(k)$, przy wykorzystaniu hipotez zamykania Pao [3] oraz Kovasznay'a [4] (zob. także [5]).

2. PODSTAWOWE RÓWNANIA

Rozważymy równanie bilansu energii kinetycznej przepływu turbulentnego w przedziale liczb falowych $k \gg L_0^{-1}$, gdzie L_0 - jest zewnętrzną skalą turbulencji związaną z geometrią rozpatrywanego przepływu i w którym przepływ może być traktowany jako lokalnie jednorodny. Po raz pierwszy takie równanie dla ośrodka jednorodnego zostało sformułowane w pracy [6]. W rozpatrywanym przez nas ogólniejszym przypadku dla stratyfikowanego termicznie i zasoleniowo przepływu turbulentnego z gradientem prędkości odpowiednie równanie ma postać:

$$\varepsilon = \int_k^\infty F(k')dk' - \frac{d\bar{u}}{dz}\int_k^\infty \tau(k')dk' = g\alpha_T\int_k^\infty E_T(k')dk' -$$

$$-g\beta_s\int_k^\infty E_s(k')dk' + 2\nu\int_0^k k'^2E(k')dk' \tag{2.1}$$

Wyraz po lewej stronie równania (2.1) opisuje całkowitą dyssypację ε energii kinetycznej turbulencji w przepływie. Pierwszy wyraz po prawej stronie równania (2.1) opisuje bezwładnościowe przenoszenie energii turbulencji w przedziale liczb falowych od k do ∞ w kierunku mniejszych liczb falowych, drugi wyraz opisuje generację energii turbulencji w przedziale $(k;\ \infty)$ w polu gradientu prędkości średniej, trzeci i czwarty wyraz opisują energetyczny wkład siły wyporu uwarunkowanej stratyfikacją termiczną i zasoleniową do całkowitej energii turbulencji, piąty wyraz opisuje lepkościową dyssypację energii turbulencji w przedziale liczb falowych $(0;k)$; g, α_T, β_s i ν oznaczają - odpowiednio - przyspieszenie ziemskie, współczynnik rozszerzalności cieplnej, współczynnik ściśliwości zasoleniowej oraz współczynnik lepkości kinematycznej. Gęstości widmowe - pionowego strumienia ciepła $E_T(k)$, pionowego strumienia soli $E_s(k)$, pionowego strumienia pędu $\tau(k)$ $[=E_{uw}(k)]$ oraz kinetycznej energii turbulencji $E(k)$ spełniają, z definicji, zależności:

$$\overline{w'T'} = \int_0^\infty E_T(k')dk';\ \overline{w's'} = \int_0^\infty E_s(k')dk';\ \overline{u'w'} = \int_0^\infty \tau(k')dk',$$

$$\frac{(u'^2+v'^2+w'^2)}{2} = \int_0^\infty E(k')dk' \tag{2.2}$$

W dalszym ciągu rozważymy równanie (2.1) w przedziale liczb falowych $k \geq k_b$, gdzie $k_b = (N^3/\varphi)^{1/2}$ jest wypornościową liczbą falową, $N = (g\ \alpha_T\ d\bar{T}/dz\ -\ g\beta_s\ d\bar{s}/dz)^{1/2}$ jest częstością Väisälä-Brunta i który obejmuje podprzedziały bezwładnościowy oraz lepkościowy. W celu uzyskania zamkniętego równania (2.1) dla widma $E(k)$ konieczne jest przyjęcie pewnych hipotez dotyczących postaci czterech wyrazów po prawej stronie tego równania. Spośród wielu możliwych hipotez wybierzemy dwie - hipotezę Pao oraz Kovasznay'a (zob. [3], [4], [5], [7]), które umożliwiają uzyskanie analitycznych rozwiązań rozpatrywanego problemu.

2.1. Rozwiązanie problemu (2.1) przy wykorzystaniu hipotezy Pao

Zgodnie z hipotezą Pao bezwładnościowe przenoszenie kinetycznej energii turbulencji można wyrazić następująco:

$$\int_k^{\infty} F(k')dk' = \frac{1}{P}\varepsilon^{1/3}k^{5/3}E(k) = \nu_T\omega_T^2 \tag{2.3}$$

gdzie P jest pewną bezwymiarową stałą, ν_T jest efektywnym (turbulentnym) współczynnikiem lepkości, ω_T jest wirowością pulsacyjnego pola prędkości.

Znajdziemy wyrażenie dla lepkości efektywnej ν_T, wykorzystując następujące rozważania [8]. W ujęciu Boussinesqa, lepkość turbulentna jest iloczynem długości charakterystycznej oraz charakterystycznej prędkości pulsacji turbulentnych, tzn. $\nu_T \sim l_k\ \nu_k$. Następnie prędkość charakterystyczna może być oszacowana jako $\nu_k \sim [kE(k)]^{1/2}$. Z kolei, $l_k \sim \nu_k t_k \sim [kE(k)]^{1/2}\varphi^{-1/3}k^{1/3}$. W rezultacie, $l_k \sim [k^{-1/3}\varepsilon^{-2/3}E(k)]^{1/2}$. Zatem otrzymamy:

$$\nu_T = \frac{1}{P}l_k\nu_k = \frac{1}{P}k^{1/3}\varepsilon^{-1/3}E(k) \tag{2.4}$$

W celu uzyskania wyrażeń dla strumieni turbulentnych wykorzystamy przybliżenie słabego oddziaływania pomiędzy ruchem średnim i pulsacyjnym [9]. Oznacza to, że charakterystyczna skala zmian prędkości średniej $L_t \sim |dz/d\bar{u}|$) jest większa od charakterystycznej skali przepływu turbulentnego $L_t \sim 1/\omega_T$) i zatem strumień pędu przenoszony jest od ruchu średniego do ruchu turbulentnego w rezultacie pracy gradientu prędkości średniej. Możliwe są inne, bardziej złożone przypadki, których jednak nie będziemy rozpatrywać (zob. np. [7], [10]).

Zgodnie z hipotezą słabego oddziaływania przyjmiemy następujące wyrażenie dla strumieni:

$$\frac{d\bar{u}}{dz}\int_k^{\infty}\tau(k')dk' = -\nu_T\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2; \qquad g\alpha_T\int_k^{\infty}E_T(k')dk' = -\nu_T^* g\alpha_T\frac{d\bar{T}}{dz}, \tag{2.5}$$

$$g\beta_s\int_k^{\infty}E_s(k')dk' = -\nu_s^* g\beta_s\frac{d\bar{s}}{dz}, \tag{2.6}$$

przy czym przyjmujemy, że współczynniki turbulentnej wymiany ciepła i soli są proporcjonalne do współczynnika turbulentnej wymiany pędu, tzn. $\nu_T^* = \alpha\ \nu_T$, $\nu_s^* = \beta\ \nu_T$, gdzie α i β są pewnymi stałymi (zob. [5]).

Uwzględniając wyrażenia (2.3), (2.5)-(2.6) w równaniu (2.1) otrzymamy:

$$\varepsilon = 2\nu\int_0^k k^2E(k')dk' + P^{-1}\varepsilon^{1/3}k^{5/3}E(k) + bP^{-1}\varepsilon^{-1/3}k^{1/3}E(k), \tag{2.7}$$

gdzie

$$b = \left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right) - \alpha g\alpha_T\frac{d\bar{T}}{dz} + \beta g\beta_s\frac{d\bar{s}}{dz} \tag{2.8}$$

Przepiszemy zależność (2.7) w postaci:

$$\varepsilon = 2\nu\int_0^k k^2E(k')dk' + P^{-1}\varepsilon^{1/3}[k^{5/3}E(k)] + bP^{-1}\varepsilon^{-1/3}k^{-4/3}[k^{5/3}E(k)] \tag{2.9}$$

Różniczkując powyższe wyrażenie, otrzymamy:

$$\frac{d[k^{5/3}\ E(k)]}{k^{5/3}\ E(k)} = \frac{\frac{4}{3}b\varepsilon^{-1/3}\ k^{-7/3} - 2\nu P^{1/3}}{\varepsilon^{1/3} + b^{-1/3}\ k^{-4/3}}dk \tag{2.10}$$

Całkując równanie (2.10), otrzymamy:

$$k^{5/3}E(k) = Q\exp\int\left(\frac{4}{3}b\varepsilon^{-1/3}k^{-7/3} - 2\nu Pk^{1/3}\right)\varepsilon^{-1/3}(1+b\varepsilon^{-2/3}k^{-4/3})^{-1}dk, \tag{2.11}$$

gdzie Q jest stałą. Ponieważ rozpatrujemy przedział liczb falowych $k_b/k \leq 1$, możemy rozłożyć mianownik w wyrażeniu podcałkowym (2.11) w szereg potęgowy i ograniczyć się do pierwszych wyrazów tego rozwinięcia. Mamy

$$(1 + b\varepsilon^{-2/3}\, k^{-4/3})^{-1} \approx 1 - b\varepsilon^{-2/3}\, k^{-4/3} \tag{2.12}$$

Łatwo zauważyć, że wyrażenie dla b może być napisane w postaci:

$$b = N^2\left(\frac{1+\beta R_i}{R_i}\right) - N_T^2(\alpha+\beta), \tag{2.13}$$

gdzie $R_i = N^2\ (du/dz)^{-2}$ jest liczbą Richardsona, a $N_T^2 = g\alpha_T\ dT/dz$ opisuje wkład pola temperatury do częstości Väisälä - Brunta.

Całkując równanie (2.1) przy założeniu (2.12), otrzymamy ostatecznie:

$$E(k) = Q'k^{-5/3} + \frac{2\nu Pb}{\varepsilon}\exp\left[-b\varepsilon^{-2/3}k^{-4/3} - \frac{3}{2}\nu P\varepsilon^{-1/3}k^{4/3} + \frac{1}{2}b^2\varepsilon^{-4/3}k^{-8/3}.\right], \tag{2.14}$$

gdzie b jest określona zależnością (2.8) lub (2.13), a Q' jest stałą.

2.2. Rozwiązanie problemu (2.1) przy wykorzystaniu hipotezy Kovasznay'a

Zgodnie z hipotezą Kovasznay'a [4] bezwładnościowe przenoszenie kinetycznej energii turbulencji można wyrazić zależnością

$$\int_k^\infty F(k')dk' = \gamma k^{5/2}[E(k)]^{3/2}, \tag{2.15}$$

gdzie γ jest stałą. Wykorzystując tak jak poprzednio hipotezę słabego oddziaływania, rozważymy postać widma energii kinetycznej turbulencji w przedziale liczb falowych, w którym można pominąć efekty lepkościowe, tzn. przyjmiemy, że $k \ll 1/k_\eta$, gdzie $k_\eta = (\nu^3/\varphi)^{1/4}$ jest skalą Kołmogorowa. Przy takim założeniu w równaniu (2.1) możemy pominąć wyraz opisujący lepkościową dyssypację energii turbulencji w przedziale $(0;k)$ i w rezultacie dla widma $E(k)$ otrzymamy następujące równanie:

$$\varepsilon = \gamma k^{5/2}[E(k)]^{3/2} + b\gamma k^{-1/2}[E(k)]^{1/2}, \tag{2.16}$$

gdzie wielkość b wyraża się wzorem (2.8) [lub (2.13)].

Równanie (2.16) po podstawieniu $x = k^{1/2}$, $y = [E(k)]^{1/2}$, $\varepsilon/\gamma = c$ sprowadza się do równania trzeciego stopnia o postaci $- y^3 x^6 + by - cx = 0$ [11]. W przypadku stabilnej stratyfikacji ($b > 0$) sens fizyczny posiada jedynie dodatni pierwiastek tego równania. Łatwo zobaczyć, że w takim przypadku widmo energii $E(k)$ będzie miało postać:

$$E(k) = \left(\frac{\varepsilon}{2\gamma}\right)^{-5/3} k^{-5/3} \left[\left\{1 - \left(1 + \frac{4}{27}\frac{b^3\gamma^2}{\varepsilon^2}\frac{1}{k^4}\right)^{1/2}\right\}^{1/3} + \right.$$

$$\left. + \left\{ + \left(1 + \frac{4}{27}\frac{b^3\gamma^2}{\varepsilon^2}\frac{1}{k^4}\right)^{1/2}\right\}^{1/3}\right]^2 \qquad (2.17)$$

3. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono półempiryczny model stratyfikowanego przepływu turbulentnego z gradientem prędkości przy wykorzystaniu klasycznych koncepcji zamykania opartych na hipotezach Boussinesq'a, Kovasznay'a i Pao. Wybór tych hipotez umożliwił otrzymanie ścisłych analitycznych rozwiązań rozpatrywanego problemu. Jednakże w ramach spektralnej teorii turbulencji nie można, jak się wydaje, rozszerzyć uzyskanych rezultatów poza rozważane przedziały widmowe oraz uwzględnić intermittentnej struktury przepływu turbulentnego. Taka możliwość, przynajmniej w zasadzie, istnieje w podejściu funkcjonalnym do problemu turbulencji, ponieważ funkcjonał charakterystyczny pola $[u, T, s]$ opisuje również, zależące od liczby Reynoldsa przepływu, statystyczne własności drobnoskalowych pulsacji tego pola [2]. Poza tym, nie widać możliwości dokonania na drodze teoretycznej jednoznacznego wyboru jednej z wielu możliwych hipotez przenoszenia energii przez kaskadę wirów. Wykorzystując rezultaty pracy [12] naszkicujemy możliwy schemat postępowania w tym zakresie:

1. Należy przeformułować problem (2.1) przy wykorzystaniu funkcjonałów charakterystycznych pól termohydrodynamicznych;
2. Należy określić grupę przekształceń skalowania, względem której przeformułowany problem (2.1) jest niezmienniczy;
3. Wykorzystując metody teorii grup, należy określić postać widma turbulencji w poszczególnych przedziałach liczb falowych.

Naszkicowany program, jako zagadnienie o wyjątkowym stopniu złożoności, nie był do tej pory rozpatrywany i będzie przedmiotem odrębnej, pogłębionej i wyczerpującej analizy.

LITERATURA

[1] Druet C.: Dynamika stratyfikowanego oceanu. Wyd. 1. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994.

[2] Icha A.: Teoria turbulencji w ośrodkach stratyfikowanych. Wyd. 1. Sopot: Rozprawy iMonografie IO PAN nr 5, 1994.

[3] Pao Y. H.: Structure of turbulent velocity and scalar fields at large wave-numbers. "Phys. Fluids", T. 8, Nr 6, ss. 1063-1075.

[4] Kovasznay L. S. G.: Spectrum of locally isotropic turbulence. „J. Aeronaut. Sci.'', T.1, Nr 12, pp. 745--753.

[5] Monin A. S., Jagłom A. M.: Statisticzieskaja gidromiechanika. T. 2, Wyd. 1. Nauka, Moskwa 1967.

[6] Tchen C. M.: On the spectrum of energy in turbulent shear flow. „J. Res. Bur. Standards'', Nr 50, ss. 51--62.

[7] Panchev S.: Random functions and turbulence. Oxford: Pergamon Press, 1971.

[8] Chakraborty A. K., Vembe B. E., Mazumdar H. P.: On the spectra of turbulent velocity field in a stably stratified flow. "Z. Naturforsch. Nr 46a, 1991, ss. 462-468.

[9] Gisina F. A.: O wlijanii gradientow sriedniej skorosti i tiempieratury na spiektralnyje charaktieristiki turbulientnosti. "Izw. Akad. Nauk SSSR,Fiz. Atmos. Okieana'', T.2, nr 8, 1966, ss. 804-813.

[10] Panchev S., Syrakov D.: Spectra thermally stratified turbulent flow with no shear. "Tellus", T. XXIII, nr 6, 1971, pp. 500-505.

[11] Chakraborty A. K., Gupta S. N., Mazumdar H. P.: Some remarks on the weak interaction process in stratified turbulent flow . „Indian Journ. Technology, T.24, 1986, pp.549-552.

[12] Icha A.: Spectral characteristics of turbulence in a stratified medium. "Phys. Scripta", T. 48, 1993, pp.140-146.

Recenzent: prof. dr hab. inż. W. Gutkowski

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1994 r.