ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995

Seria: MECHANIKA z. 122 Nr kol. 1267

Stefan JONIAK
Instytut Mechaniki Stosowanej
Politechnika Poznańska

WPŁYW POSTACI FUNKCJI UGIĘCIA NA WARTOŚĆ OBCIĄŻENIA KRYTYCZNEGO PŁYTY PIERŚCIENIOWEJ OBCIĄŻONEJ MOMENTEM OBROTOWYM

Streszczenie. Płyta pierścieniowa jest obciążona na brzegu wewnętrznym momentem obrotowym. Problem utraty stateczności rozwiązano metodą energetyczną przy wykorzystaniu kryterium stateczności Bryana. W pracy przebadano funkcje ugięcia o trzech różnych postaciach. Wynikami rozwiązań zagadnienia utraty stateczności na podstawie trzech różnych funkcji ugięcia są obciążenia krytyczne. Przydatność funkcji ugięcia oceniano w oparciu o eksperymenty.

THE INFLUENCE OF THE FUNCTION FORM TO CRITICAL LOAD OF RING-SHAPED PLATE LOADED BY A TORQUE

Summary. A Ring-shaped plate is loaded by a torque applied ad the internal edge of the plate functions were tested, which describe the plate surface with three different forms. The results of the stability loss problem are the critical loads. The advantages of the proposed deflection function, were evaluated by comparison of the theoretical results with the experiment.

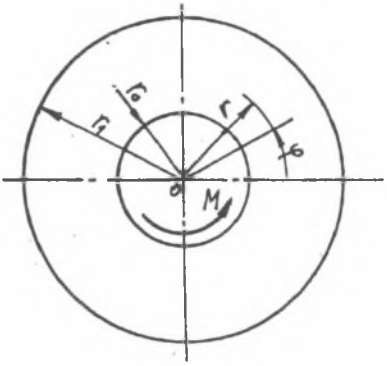
ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ФУНКЦИ ПРОТИБА НА КРИТИЧЕСКУЮ НАГРУЗКУ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ НАГРУЖЕНОЙ КРУТЯЩИМ МОМЕНТОМ

Резюме. Кольцевая пластинка нагружена на бнутренном контуре крутящим моментом. Проблему потери устройчивости пластинки решено энергетическим методом. Были иследованы функции прогиба трех различных форм. Основанием оценки пригодности функци прогиба были результаты экспериментов устойчивости пластинок.

1. WSTĘP

Płyta pierścieniowa (rys. 1) jest utwierdzona na brzegu zewnętrznym i wewnętrznym. Brzeg wewnętrzny ma jednak możliwość obrotu środka płyty. Do brzegu wewnętrznego przyłożone jest obciążenie w postaci momentu obrotowego.

Celem pracy jest określenie przydatności funkcji ugięcia o różnych postaciach do rozwiązania zagadnienia stateczności płyty. Powodem są niezadowalające wyniki wcześniejszych własnych rozwiązań. Badana płyta jest cienka a jej materiał podlega prawu Hooke'a.



Rys.1

2. RÓWNANIA ZAGADNIENIA

Problem rozwiązano metodą energetyczną. Podstawą rozwiązania było kryterium stateczności Bryana [1]

$$\Delta E = U - W = 0, \tag{1}$$

gdzie:

ΔE - zmiana całkowitej energii potencjalnej,
U - energia zginania płyty,
W - praca sił zewnętrznych,

Dla płyty kołowej jest

$$U=\frac{D}{2}\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)^2 - 2(l-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial \varphi}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2\right]\right\}dr\ rd\varphi, \tag{2}$$

$$W=\frac{h}{2}\iint\left[\sigma_r\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\sigma_t\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2+2\tau\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right]dr\ rd\varphi, \tag{3}$$

gdzie:

w - ugięcie płyty
r, φ - współrzędne bigunowe,
D - sztywność płytowa,
h - grubość płyty,
σ_r, σ_t, τ - naprężenia stanu błonowego,
ν - liczba Poissona.

W przypadku płyty z rysunku 1

$$\sigma_r = \sigma_t = 0, \text{ zaś } \tau = \frac{M}{2\pi r^2 h} \tag{4}$$

W wyrażeniach (2) i (3) zastosowano przekształcenie $r = r_0\rho$ oraz uwzględniono (4), co dało

$$U=\frac{D}{2r_0^2}\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)^2 - 2(l-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)-\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial \rho\partial \varphi}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial w}{\partial \rho}\right)^2\right]\right\}d\rho\ \rho d\varphi, \tag{5}$$

$$W = h\iint\tau_0\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial w}{\partial \rho}\frac{\partial w}{\partial \varphi}d\rho\ d\varphi \tag{6}$$

W równaniu wprowadzono oznaczenie:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\rho^2}, \; przy\ czym \quad \tau_0 = \frac{M}{2\pi r_0^2 h} \tag{7}$$

3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

Przyjęty schemat zamocowania brzegów płyty daje następujące warunki brzegowe:

$$r=r_0 \; i \; r=r_1, \; w=0 \; i \; \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \tag{8}$$

Po zastosowaniu przekształcenia $r = r_0\rho$

$$\rho=1 \; i \; \rho=k, \; w=0 \; i \; \frac{\partial w}{\partial \rho} = 0. \tag{9}$$

przy czym

$$k = \frac{r_1}{r_0}$$

Aby osiągnąć cel przyjęto funkcję ugięcia po wyboczeniu w trzech następujących postaciach:

$$w = A\cos^2\frac{\pi}{2}\frac{2\rho-k-1}{k-1}\sin\left(\frac{\pi}{k}\rho+m\varphi\right), \tag{10}$$

$$w = A[\rho^2-\rho(k+1)+k]\sin\left(\frac{\pi}{k}\rho+m\varphi\right), \tag{11}$$

$$w = A(\rho-1)^2\sin^2\frac{\pi}{k}\rho\sin\left(\frac{\pi}{k}\rho+m\varphi\right), \tag{12}$$

gdzie:
A - stała,
m - ilość fal wyboczenia w kierunku obwodowym.

Funkcje (10, (11), (12) spełniają warunki brzegowe (9).

Postacie funkcji ugięcia zaproponowano na podstawie eksperymentów [2]; odwzorowują one rzzeczywistą powierzchnię wyboczenia płyty. W celu wyznaczenia dowolnej stałej A należy spełnić warunek

$$\frac{\partial(\Delta E)}{\partial A} = 0 \tag{13}$$

Funkcje (10), (11), (12) należy koleno wprowadzić do równania (5) i (6), po czym te ostatnie przecałkować w granicach $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ i $1 \leq \rho \leq k$. Składniki energii całkowej U i W po wprowadzeniu do równania (1) dają:

$$\Delta E = \frac{D}{2r_0^2} A^2 H_1 - hA^2 \tau_0 H_2, \tag{14}$$

gdzie: H_1, H_2 - stałe zawierające wymiary płyty, parametr liczby fal wyboczenia m oraz liczbę Poissona.

Zróżniczkowanie wyrażenia (14) względem A i przyrównanie pochodnej do zera daje po przekształceniach

$$\tau^* = \left(\frac{r_0}{h}\right)^2 \frac{\tau_o}{E} = \frac{a+bm^2+cm^4}{dm}, \tag{15}$$

gdzie: a, b, c, d - stałe zależne od wymiarów płyty i liczby Poissona.

4. PRZYKŁAD LICZBOWY I WNIOSKI

Równanie (15) służy do wyznaczenia obciążeń krytycznych. Rozwiązywano je numerycznie przy następujących danych:

$$\frac{h}{r_0} = 0{,}014,\ k = 1{,}8;\ 2{,}0;\ 2{,}3;\ 2{,}5;\ 3{,}0;\ 4{,}0;\ \textit{oraz}\ \nu = 0{,}3$$

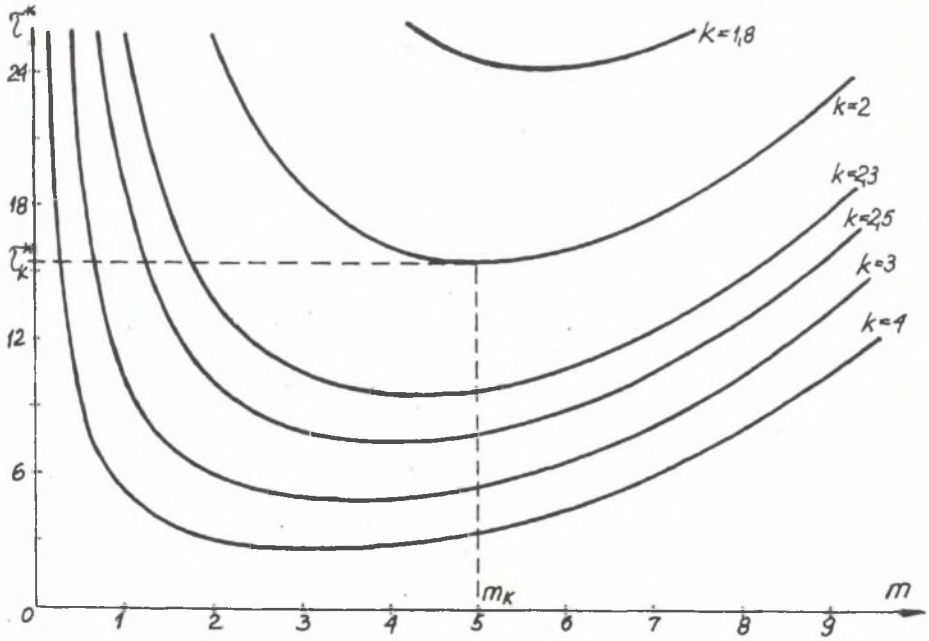
Wartość współczynników równania (15), reprezentujących funkcję ugięcia (10), podano w tablicy 1.

Rozwiązania równania (15) mają postać wykresów we współrzędnych τ^* - m. Z wykresów tych dla zadanego k należy odczytać minimalną wartość parametru obciążenia τ^* i odpowiadającą mu liczbę fal wyboczenia m. Minimalna wartość parametru τ^* wyznacza krytyczną wartość parametru obciążenia τ^*_k, zaś odpowiadająca tej wartości liczba m krytyczną liczbę fal m_k. Na rysunku 2 przedstawiono rodzinę rozwiązań otrzymaną z danych zawartych w tablicy 1. Pokazano też na nim sposób wyznaczania τ^*_k i m_k.

Tablica 1

k	a	b	c	d
1,8	100,64	1,423	0,01637	1,1828
2,0	58.87	1,093	0,01689	1,2449
2,3	31,96	0,7973	0,01688	1,2841
2,5	23,09	0,6624	0,01657	1,2884
3,0	12,19	0,4544	0,01535	1,2598
4,0	5,08	0,2570	0,01257	1,1451

Krytyczne wartości parametru obciążenia i liczby fal wyboczenia otrzymane przy zastosowaniu funkcji ugięcia o postaciach (10), (11) i (12) zebrano w tablicy 2.

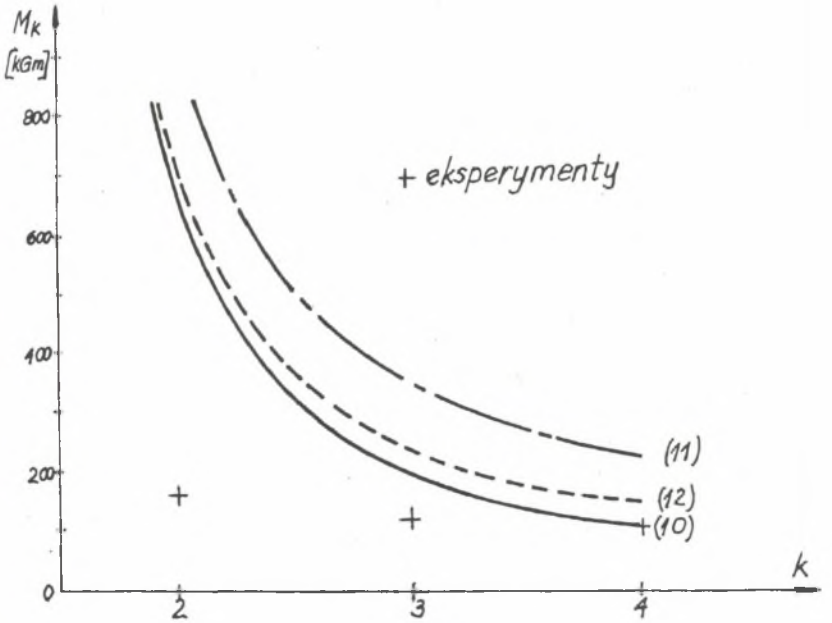


Rys. 2

Aby ocenić "dobroć" funkcji ugięcia, sporządzono wykresy krytycznych wartości momentu obrotowego M_k (7) w funkcji k (przy $r_0 = 50\ mm$); wykresy te zawiera rysunek 3. Na rysunku tym naniesiono wyniki eksperymentów [2] przeprowadzonych na płytach reprezentowanych przez k = 2, 3 i 4. Z rysunku 3 wynika, że najbliższe rzeczywistości wyniki daje użycie funkcji ugięcia (10); jest to więc funkcja (spośród przebadanych) najbardziej przydatna do rozwiązań teoretycznych. Należy też stwierdzić, że jej stosowanie jest najkorzystniejsze dla płyt o stosunku promienia zewnętrznego do wewnętrznego wynoszącego do 3 i więcej.

Tablica 2

k	Funkcja (10)		Funkcja (11)		Funkcja (12)	
	τ^*_k	m_k	τ^*_k	m_k	τ^*_k	m_k
1,8	24,33	6	31,90	6	25,18	6
2,0	15,52	5	21,75	5	16,74	5
2,3	9,51	4	14,45	4	10,73	5
2,5	7,37	4	11,73	4	8,58	4
3,0	4,58	3	8,15	3	5,72	4
4,0	2,43	3	5,29	3	3,43	4



Rys. 3

LITERATURA

[1] Girkmann K.: Dźwigary powierzchniowe. Arkady, Warszawa 1956

[2] Joniak S.: Stanowisko do badania stateczności płyt pierścieniowych obciążonych momentem obrotowym i badania ich stateczności. Mat. XVI Symp. Mechaniki Eksperymentalnej, Warszawa-Jachranka, październik 1994, ss. 124-126

Recenzent: prof. dr hab. inż. A. Tylikowski

Wpłynęło do Rekacji w grudniu 1994 r.