

Grzegorz LITAK, Wojciech PRZYSTUPA, Kazimierz SZABELSKI
Katedra Mechaniki Stosowanej
Politechnika Lubelska

DRGANIA CHAOTYCZNE PRZEKŁADNI ZĘBATEJ

Streszczenie. W pracy zbadano drgania przekładni zębatej na podstawie modelu Sato [1]. Stosując wykładniki Lapunowa określono zbiór parametrów układu prowadzących do ruchu chaotycznego. Przeprowadzono analizę wpływu luzu międzyzębnego i wymuszenia zewnętrznego na charakter ruchu przekładni. Dla parametrów determinujących regularny i chaotyczny ruch układu porównano mapy Poincarégo, portrety fazowe i przebiegi czasowe obciążenia dynamicznego.

CHAOTIC VIBRATION OF A GEAR SYSTEM

Summary. In this paper vibration of a gear system in Sato model [1] were examined. Using Lyapunov exponents the set of system parameters which lead to the chaotic motion were determined. An analysis of the influence of backlash and force input on the gear system were carried out. For parameters that determine regular and chaotic motion Poincaré maps, phase planes and time series of dynamic load were compared.

ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧИ

Резюме. В работе исследованы колебания зубчатой передачи на основе модели Сато [1]. С помощью показателей Лапунова определён состав параметров системы приводящих к хаотическому движению. Выполнен анализ влияния зазора между зубьями и внешнего вынуждения на характер движения передачи. Для параметров детерминирующих регулярное и хаотические движение системы сравнено отображение Пуанкаре, фазовые диаграммы, а также изменения по времени динамической нагрузки.

1. WSTEP

W ostatnich latach ukazało się wiele prac poświęconych badaniu chaosu w układach mechanicznych [2]. Zwrócono przy tym uwagę na modele drgań skrętnych przekładni zębatych, stwierdzając występowanie ruchu chaotycznego [1,3,4]. Jednym z wyróżników

określających przejście układu do ruchu chaotycznego jest wykładnik Lapunowa [5]. Wyznaczenie wartości wykładników Lapunowa, w zależności od parametrów układu, pozwala na określenie ich wartości krytycznych, przy których pojawia się chaos. W pracy zbadano wykładniki Lapunowa w funkcji luzu międzyzębnego i amplitudy zewnętrznego wymuszenia drgań. Celem badań jest ustalenie wpływu wybranych parametrów przekładni zębatej na występowanie stanów ruchu chaotycznego.

2. MODEL PRZEKŁADNI

W pracy przyjęto model matematyczny drgań przekładni zębatej przedstawiony w [1] w postaci:

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + 2\zeta \frac{d\Psi}{dt} + k(t)g(\Psi + e_r(t), \eta) = \frac{T_1}{1+i^2} + \frac{i^3 T_2}{1+i^2} \quad (1)$$

W powyższym równaniu różniczkowym przyjęto następujące wielkości bezwymiarowe:

Ψ - kąt obrotu,

ζ - współczynnik tłumienia,

$k(t)$ - sztywność zazębienia,

$e_r(t)$ - błąd kształtu zęba,

η - luz międzyzębny,

i - przełożenie przekładni,

$g(\Psi + e_r(t), \eta)$ - nieliniowa funkcja zazębienia,

T_1, T_2 - wejściowy i wyjściowy moment obrotowy.

Podstawiając w równaniu (1) $x = \Psi + e_r$ oraz przyjmując założenie dotyczące częstości obciążeń zewnętrznych i błędów kształtu zazębienia, otrzymano [1]:

$$\frac{d^2x}{dr^2} + \frac{2\zeta}{\omega} \frac{dx}{dr} + \frac{k(r)}{\omega^2} g(x, \eta) = \frac{B}{\omega^2} \cos(r + \Theta) + \frac{B_0}{\omega^2}, \quad (2)$$

gdzie:

ω - częstość,

B - amplituda wymuszenia harmonicznego,

B_0 - składowa statyczna wymuszenia,

Θ - kąt fazowy,

$r = \omega t$ - czas bezwymiarowy.

Funkcję $g(x, \eta)$ przyjęto w postaci:

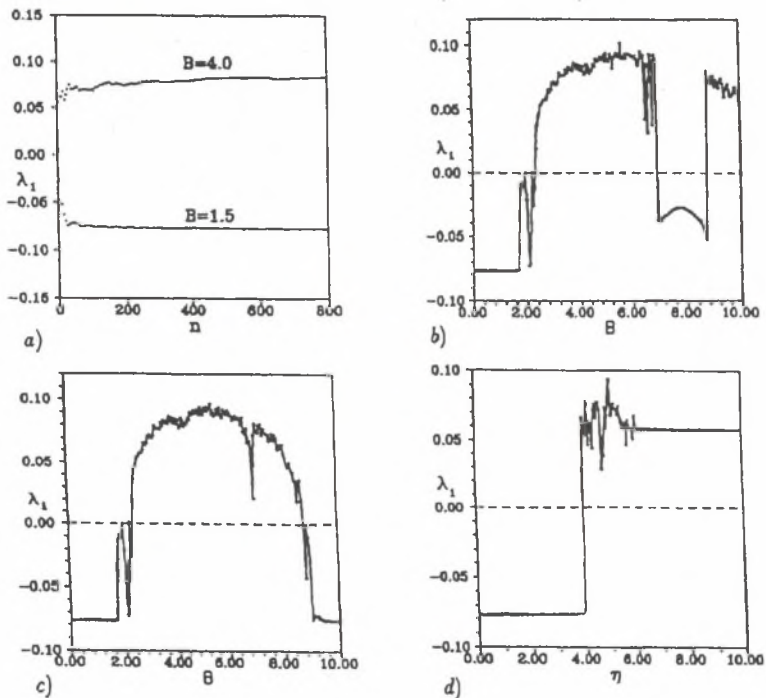
$$g(x, \eta) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & -\eta < x < 0 \\ x + \eta, & x \leq -\eta. \end{cases}$$

Szywność ząbienia $k(r)$ dana jest wyrażeniem [1]:

$$k(r) = \begin{cases} 0.6+r/0.03\pi & 0 \leq r \leq 0,12\pi \\ 1 & 0,12\pi \leq r \leq 1,08\pi \\ 0.6-r/0.03\pi & 1,08\pi \leq r \leq 1,2\pi \\ 0,6 & 1,2\pi \leq r \leq 2\pi. \end{cases}$$

3. WYNIKI BADAŃ

W celu rozwiązania równania różniczkowego (2) napisano program numeryczny, w podwójnej precyzji, na podstawie pracy [7]. Obliczono wykładniki Lapunowa w funkcji wybranych parametrów układu.

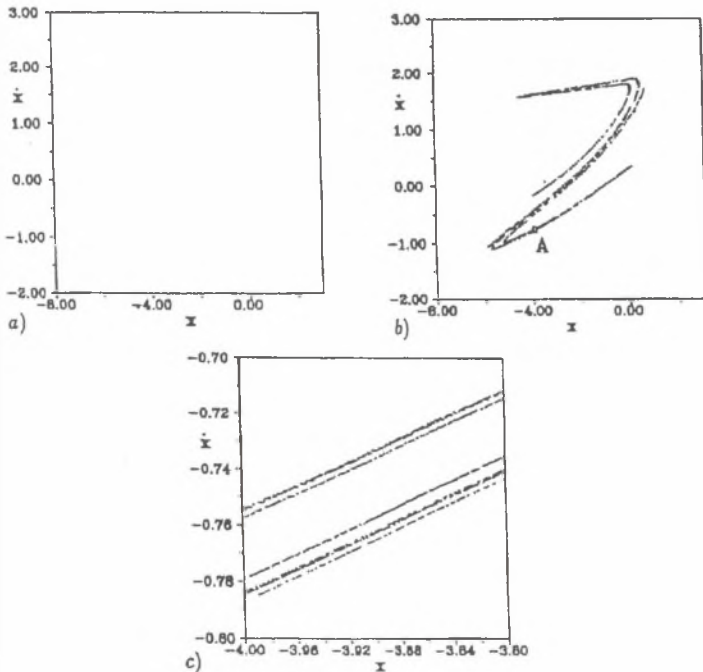


Rys.1. Wykładnik Lapunowa λ_1 (a) w funkcji czasu (n oznacza liczbę cykli wymuszenia), $\omega = 1.5$, $\zeta = 0.08$, $B_0 = 7$, $\Theta = 0$); w funkcji amplitudy B ($\eta = 10$) (b) oraz $\eta = 7$ (c) (d) funkcji luzu η ($B = 4$)

Fig.1. Lyapunov exponent λ_1 (a) as a function of time, (n denotes number of drive cycles), $\omega = 1.5$, $\zeta = 0.08$, $B_0 = 7$, $\Theta = 0$); as a function of amplitude B ($\eta = 10$) (b) and $\eta = 7$ (c) (d) as a function of backlash η ($B = 4$)

Na rys.1a przedstawiono wykładnik λ_1 , wykreślony w funkcji czasu (n oznacza liczbę cykli wymuszenia zewnętrznego). Wyniki dotyczą następujących parametrów: $\omega = 1,5$, $\zeta = 0,08$, $B_0 = 1$, $\eta = 7$, $\Theta = 0$ oraz dwóch wartości amplitud $B = 1.5$ oraz $B = 4.0$. Z badań wynika, że po 600 cyklach wymuszeń zewnętrznych otrzymujemy ustalony stan drgań układu. Dla $B = 4.0$ wykładnik Lapunowa ma wartość dodatnią, co świadczy o ruchu chaotycznym.

Na rys.1b. i c przedstawiono wykładniki Lapunowa przy dwóch wartościach luzu międzyzębnego $\eta = 10$ (rys. 1b) i $\eta = 7$ (rys. 1c). Początkowo, w miarę wzrostu amplitudy wymuszającej B wykresy (1b i 1c) są podobne. W otoczeniu $B = 2$ występują oscylacje wykładnika λ_1 . Jest to związane ze zjawiskiem podwajania okresu. Ruch chaotyczny rozpoczyna się, gdy wykładnik Lapunowa osiąga wartość dodatnią. Dla $\eta = 10$, w otoczeniu wartości $B = 8$ pojawia się strefa ruchu regularnego (rys. 1b), która nie występuje w przypadku mniejszego luzu $\eta = 7$ (rys. 1c). Jeden z punktów na wykresie 1c ($B = 3.5$) odpowiada przypadkowi ruchu chaotycznego, zbadanego w pracy [4]. Rys. 1d przedstawia wykres wykładnika λ_1 w funkcji luzu międzyzębnego.

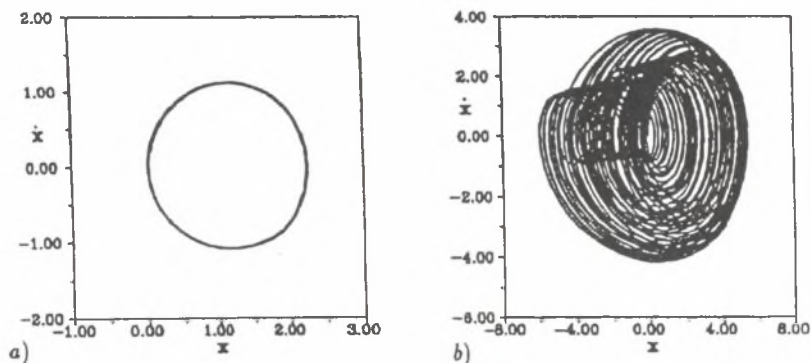


Rys.2. Mapy Poincarégo (parametry jak na rys.1a),
 (a) - ruch regularny ($B=1.5$) i (b) - ruch chaotyczny ($B=4$);
 (c) - podobszar A zaznaczony na rys. 2b.

Fig.2. Poincaré maps (parameters according to Fig.1a),
 (a) - regular motion ($B=1.5$) and (b) - chaotic motion ($B=4$);
 (c) - subregion A marked in Fig.2b.

Okazuje się, że jest to istotny czynnik powodujący przejście układu z ruchu regularnego do chaotycznego. Po przekroczeniu wartości krytycznej luzu ($\eta_c \approx 4,0$) przy $B = 4.0$ układ zachowuje się chaotycznie.

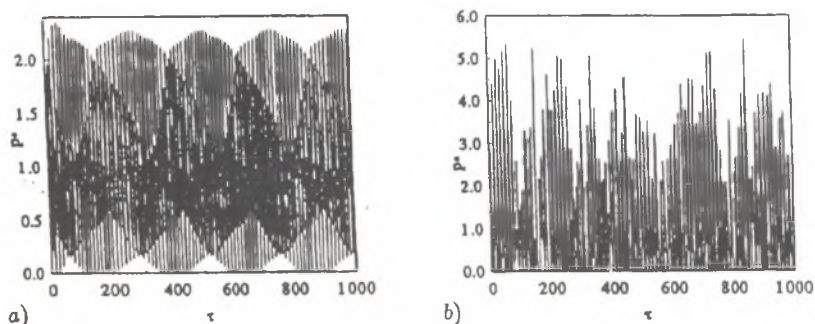
Na rys. 2a i 2b przedstawiono wyniki odwzorowań Poincarégo dla ruchu regularnego i chaotycznego, przyjmując parametry układu jak na rys. 1a. Rys. 2c, przedstawiający podobszar A , zaznaczony na rys. 2b, obrazuje strukturę fraktalną dziwnego atraktora [6].



Rys.3. Portrety fazowe (parametry na rys.2, (a) - ruch regularny, (b) - ruch chaotyczny.

Fig.3. Phase planes (parameters according to Fig.2), (a) - regular motion, (b) - chaotic motion.

Na rys.3a i 3b przedstawiono portrety fazowe ruchu regularnego i chaotycznego dla parametrów z rys.2a i 2b. Podobne struktury dziwnych atraktorów (rys. 2a i 3b) otrzymano w pracy [4] dla $B = 3.5$.



Rys.4. Obciążenie dynamiczne P^* w funkcji czasu τ (parametry jak na rys.2, (a) - ruch regularny, (b) - ruch chaotyczny

Fig.4. Dynamic load P^* as a function of time τ (parameters according to Fig.2, (a) - regular motion, (b) - chaotic motion

Na rys.4a i 4b przedstawiono wykresy obciążenia dynamicznego $P^* = k(r) g(x, \eta)$ w funkcji czasu dla ruchu regularnego (rys. 4a) i chaotycznego (rys. 4b).

4. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono wyniki symulacji numerycznej drgań modelu Sato przekładni zębatej [1]. Znalaziono obszar występowania rozwiązań chaotycznych stosując metodę wykładników Lapunowa. Rozpatrując różne warianty wartości parametrów przekładni porównano drgania regularne i chaotyczne na podstawie oceny wykładnika Lapunowa (rys. 1a), map Poincarégo (rys.2), portretów fazowych (rys.3) i przebiegów czasowych obciążeń dynamicznych (rys.4). W zakresie badanych wartości parametrów stwierdzono strefy występowania chaosu, zależne od wartości amplitud wymuszeń zewnętrznych, oraz wpływ luzu międzyzębnego na istnienie drgań chaotycznych. Przeprowadzone badania stanowią poszerzenie analizy drgań przekładni zębatej zawartej w pracach [1, 4].

LITERATURA

- [1] Sato K., Yamamoto S., Kawakami T.: Bifurcation Sets and Chaotic States of a Gear System Subjected to Harmonic Excitation. *Computational Mechanics*, 1991, 172-182.
- [2] Holmes P.J., Moon F.C.: Strange Attractors and Chaos in Nonlinear Mechanics. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 50, 1983, 1021-1031.
- [3] Hongler H.O., Streit L.: On the Origin of Chaos in Gearbox Models. *Physica*, 29D, 1988, 402-408.
- [4] Dyk J., Krupa A., Osiński J.: Analysis of Chaos in Systems with Gears. *Mechanika Stosowana i Teoretyczna* 32, 1994, 549-563.
- [5] Schuster H.G.: *Chaos deterministyczny*. Wyd.1. PWN, Warszawa 1993.
- [6] Mandelbrot B.B.: *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco 1982.
- [7] Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A.: Determining Lyapunov Exponents from a Time Series. *Physica*, 1988, 285-317

Recenzent: prof.dr hab.inż. A. Ołędzki

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1994 r.